

## **Aula 00 - Prof. Juliano de Pelegrin**

*PETROBRAS (Ênfase 16 - Engenharia  
de Petróleo) Conhecimentos Específicos  
(Parte de Mecânica)*

Autor:  
**Felipe Canella, Juliano de Pelegrin**

08 de Abril de 2025

## Sumário

Estática e Resistência dos Materiais .....	3
1 – Estática.....	3
1.1 – Conceitos .....	3
1.2 – Sistemas de forças .....	4
1.3 – Momento.....	6
1.4 – Equilíbrio .....	7
1.5 – Análise de estruturas.....	11
1.6 – Forças Distribuídas .....	17
1.7 – Momento de Inércia .....	22
1.8 – Vigas - Efeitos Internos.....	25
2 – Resistência dos Materiais .....	28
2.1 – Tensão .....	28
2.2 – Deformação e Propriedades dos Materiais.....	34
2.3 – Cargas axiais .....	39
2.4 – Torção .....	41
2.5 – Flexão .....	44
2.6 – Vasos de pressão.....	48
2.7 – Transformações de tensões e deformações.....	49
2.8 – Deflexão .....	62
2.9 – Flambagem em colunas.....	64
3 – Considerações Finais .....	67
4 - Questões Comentadas .....	68
5 - Lista de Questões.....	103



6 - Gabarito .....	118
7 – Resumo.....	119



# ESTÁTICA E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Caro(a) concurseiro(a), nada melhor para iniciarmos o nosso curso do que estudarmos a mecânica dos sólidos, não concorda?! A mecânica é uma ciência que trata dos efeitos de forças sobre objetos. Para termos um melhor embasamento, podemos definir a **mecânica** como um ramo das ciências físicas que **lida com estado de repouso e movimento de corpos sujeitos à ação de forças**.<sup>1</sup> Em nosso curso, estudaremos a princípio a mecânica dos corpos rígidos. Posteriormente, de acordo com o desenvolvimento do curso, abordaremos a mecânica dos corpos deformáveis e mecânica dos fluidos.

Nesta aula, iremos abordar a **mecânica dos corpos rígidos estáticos** em conjunto com a **resistência dos materiais**, também chamada de Mecânica dos Sólidos. Normalmente há uma **maior incidência** de questões a respeito de **resistência dos materiais** do que estática nas provas, contudo devemos passar pelo estudo da mecânica geral estática para posteriormente desenvolvermos nosso conhecimento sobre a mecânica dos sólidos. Vamos, então, iniciar pelo estudo da estática, bora lá?

## 1 – Estática

A primeira subdivisão da mecânica dos corpos rígidos que iremos estudar é a **estática**. Esta aborda o **equilíbrio dos corpos em repouso**. Alguns autores gostam de adotar a estática como um caso especial da dinâmica, pois ela pode ser considerada um caso em que não há aceleração, contudo devemos estudá-la separadamente, pois muitos projetos de objetos são desenvolvidos para se manterem parados ou — tecnicamente falando — em equilíbrio.

Vamos iniciar estudando alguns conceitos a respeito da estática e, na sequência, passaremos a estudar os seguintes tópicos: força; momento; equilíbrio; análise estrutural, momento de inércia, centroide, atrito e forças distribuídas.

### 1.1 – Conceitos

Para começarmos a entender um pouco mais sobre a estática e como ela é cobrada em concursos públicos, iniciaremos o aprendizado por alguns conceitos básicos:

**Força:** basicamente é uma **grandeza vetorial**, sendo a ação de um objeto (corpo) sobre outro. Normalmente tende a mover o objeto na direção para a qual esta age.

**Espaço:** **região geométrica** que os corpos ocupam. As posições dos objetos são definidas no espaço, a partir da origem, através de medidas lineares e angulares dentro de um sistema cartesiano, que pode ser de duas ou três dimensões.

---

<sup>1</sup> R.C. Hibbeler – Mecânica para engenharia.



**Massa:** grandeza que demonstra a **quantidade de matéria** de um corpo, sendo esta a sua resistência à variação de velocidade. A massa é uma grandeza muito presente nos problemas de estática.

**Partícula:** é um corpo com dimensões desprezíveis, sendo um **elemento infinitesimal** de um corpo.

**Corpo rígido:** é aquele cujas propriedades do material não precisam ser consideradas na análise das grandezas físicas que atuam sobre ele. Quando analisamos problemas que envolvem mecanismos de grande porte ou com boas propriedades mecânicas, as **deformações** que podem ocorrer no objeto são **desprezadas** por serem relativamente pequenas, assim podemos denominar esse objeto como um corpo rígido.

Conhecidos alguns conceitos, no próximo tópico abordaremos os sistemas de forças.

## 1.2 – Sistemas de forças

Antes de começarmos o estudo dos sistemas de forças envolvidas na mecânica geral estática, vamos relembrar rapidamente o conteúdo de grandezas escalares e vetoriais.

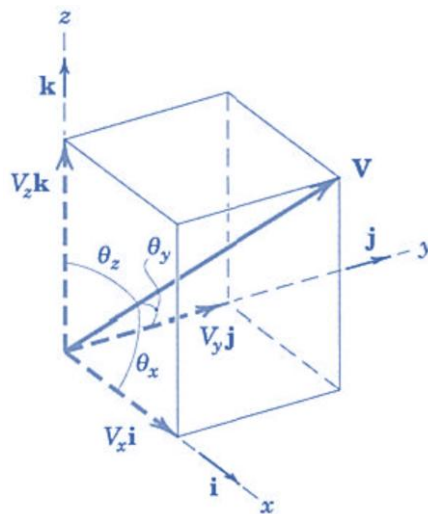
Na mecânica, utilizamos dois tipos de grandezas, que são as escalares e as vetoriais. Alguns exemplos de **grandezas escalares** são: tempo, volume, massa, densidade... E o que elas têm em comum? Todas são definidas apenas como **um valor**. Já as grandezas vetoriais, além de possuírem um valor, possuem direção. Alguns exemplos de grandezas vetoriais são: velocidade, aceleração, força... Além disso, o módulo das grandezas vetoriais é um escalar. Os vetores podem ser decompostos em componentes relativos ao sistema de coordenadas cartesianas, logo podemos representar um vetor  $V$  da seguinte forma:

$$V = V_x i + V_y j + V_z k$$

Onde  $i$ ,  $j$  e  $k$  são vetores com valores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

Os **valores das componentes** de um vetor podem ser calculados através dos **cossenos diretores**, de acordo com a imagem abaixo, na qual o vetor é representado graficamente por uma flecha, que define sua intensidade, direção (ângulo) e sentido. Vejamos:





Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Assim podemos definir as componentes do vetor da seguinte maneira:

$$V_x = V \cdot \cos(\theta_x); V_y = V \cdot \cos(\theta_y); V_z = V \cdot \cos(\theta_z)$$

E, por fim, o módulo do vetor também pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

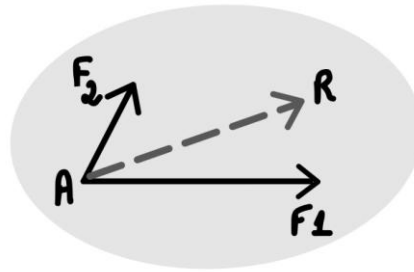
Agora que retomamos alguns conhecimentos básicos a respeito de grandezas escalares e vetoriais, passemos ao estudo das forças que atuam em equipamentos de engenharia e estruturas. Aconselho a **resolução** de diversos exercícios neste tópico. Você precisa ficar afiado em **TODO este tópico**, pois isso ajudará no estudo de análise de tensões nesta aula, projeto de máquinas e escoamento de fluidos em aulas futuras.

Antes de abordarmos um conjunto de forças, devemos conhecer as propriedades de uma única força. Para especificarmos completamente a ação de uma força, precisamos conhecer seu módulo, direção e ponto de aplicação. Uma força aplicada a um suporte causa efeitos de reação (não demonstrado) no suporte em direção contrária à da força. Conforme a terceira Lei de Newton, a atuação de uma força é sempre respondida por uma reação igual e oposta.

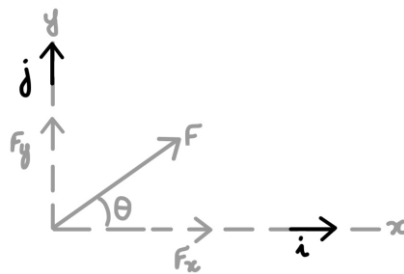
As **forças** podem ser **concentradas ou distribuídas**. Usualmente, como as dimensões da área são muito pequenas em relação ao tamanho total do corpo analisado, adotamos a força como concentrada em apenas um ponto para análise. A **unidade padrão** da força em unidades do SI é o **Newton** (N) no sistema inercial e o **quilograma-força** (kgf) no sistema gravitacional.

Como qualquer grandeza matemática, podemos realizar operações com vetores como multiplicação por escalar, adição, subtração e decomposição. A figura abaixo exemplifica a resultante R obtida através da soma dos vetores F<sub>1</sub> e F<sub>2</sub>.





Quando abordamos a decomposição bidimensional de um vetor de força, aplicamos a **regra do paralelogramo**, em que o **vetor F** pode ser escrito como a **soma entre** as respectivas **componentes X e Y**. Os componentes escalares podem ser de grandeza positiva ou negativa de acordo para qual quadrante F aponta. A figura abaixo representa a regra do paralelogramo, em que os valores de cada componente do vetor F podem ser calculados pelas seguintes equações:



$$F_x = F \cdot \cos \theta; F_y = F \cdot \sin \theta; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right)$$

Como exemplificado anteriormente, a força é uma grandeza que pode ser representada por um vetor com valor e direção em mais de um sentido. Além de podermos combinar forças, usualmente necessitamos **decompor uma força** em suas componentes vetoriais, para então resolvermos determinadas questões em que se exige a determinação da resultante entre mais de uma força.

Conhecidas a grandeza força, vamos ao estudo do momento, que nada mais é que a atuação de uma força sobre um objeto tendendo a girar este em relação a um eixo.

### 1.3 – Momento

Quando aplicamos uma força perpendicular à superfície de uma porta, sobre a maçaneta, estamos ocasionando um **momento** em relação as dobradiças desta. Agora, pense em abrir a porta, exercendo uma força no meio dela, entre a dobradiça e a maçaneta. A força que deve ser aplicada é maior, pois a **distância até o ponto** que está sendo aplicado o momento é menor.

O momento, também conhecido como **torque**, está presente em diversas situações de nosso cotidiano, como o ato de desparafusar a roda do carro quando precisamos trocar o pneu. Exercemos uma **força** sobre a chave de boca, **a uma distância** do parafuso, ocasionando um momento sobre a porca do parafuso. Essa tendência a rotação é conhecida como momento.

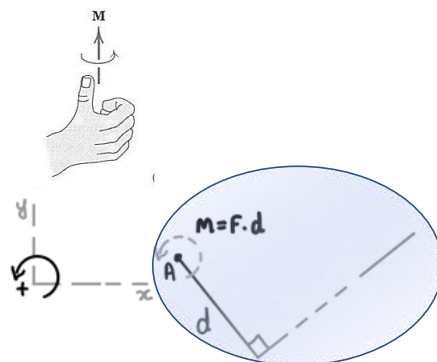
O **momento** é um vetor M sempre **perpendicular** ao plano do corpo. O sentido dele depende da direção para a qual a força F aplicada, a uma distância (d), tende a girar o corpo. Com isso, o **módulo do**



**momento** é proporcional ao módulo da força e a distância ( $d$ ), também conhecido como **braço da alavanca**. Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Para definirmos o **sentido do momento**, utilizamos a **"regra da mão direita"**, em que o momento  $F$  em torno de um ponto  $O$  é definido como um vetor no sentido do polegar e o sentido de giro é representado pelos dedos curvados. Normalmente, como convenção, adotamos o momento no sentido **anti-horário como positivo**. A **unidade** básica do momento é **newton-metro** (N.m.). Vejamos a figura abaixo que exemplifica a regra da mão direita:



Em muitas questões envolvendo momento bidimensional e tridimensional, é apropriado adotar um enfoque vetorial para o cálculo. Sendo assim, a **análise vetorial cartesiana** é usada frequentemente para solucionar questões em **três dimensões**, em que a direção positiva dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  é definida pelos vetores cartesianos unitários  $i$ ,  $j$  e  $k$  respectivamente. Para se determinar a resultante de um sistema de forças concorrentes, devemos expressar cada uma das forças como um vetor e somar suas componentes  $i$ ,  $j$  e  $k$ .

Para facilitarmos a resolução de questões, trabalhamos com vetores. Assim, o momento de uma força em notação vetorial pode ser obtido através do determinante entre as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do ponto  $r$  a partir do ponto  $O$  e as componentes das forças em cada direção. Vejamos:

$$M_o = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Em questões de **duas dimensões**, é apropriado adotar o **princípio dos momentos**, também conhecido como **teorema de Varignon**, o qual determina que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à **soma dos momentos** dos componentes **da força em relação ao ponto**.

Vamos ao estudo do equilíbrio em duas dimensões.

## 1.4 – Equilíbrio

Caro concurseiro, ao estudarmos a **estática**, basicamente estamos analisando as condições necessárias para mantermos o **equilíbrio de forças** em máquinas e estruturas de engenharia. Sendo assim, o estudo do equilíbrio é a parte mais importante sobre a estática e serve também para a resolução de questões de dinâmica que serão abordadas na aula 01 de nosso curso.





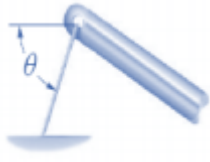
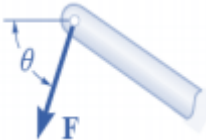

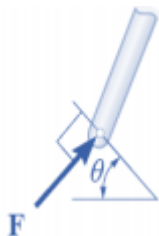
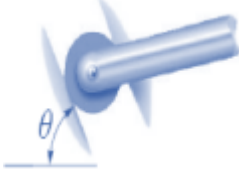
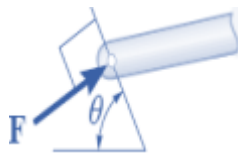
Quando um corpo (estrutura) está em **equilíbrio**, isto quer dizer que ele está **imóvel**, e a resultante do somatório de todas as forças e momentos que atuam sobre esse corpo são iguais a zero. Logo, as condições necessárias para um corpo estar em equilíbrio são:

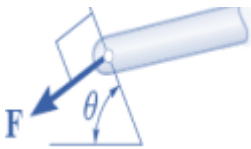

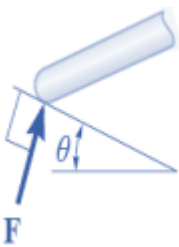

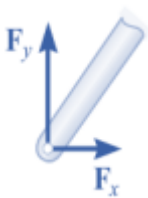


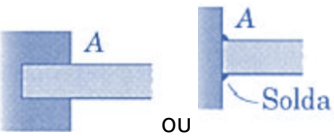
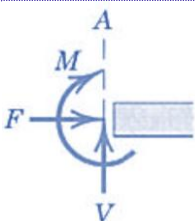
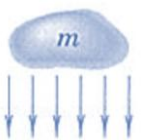

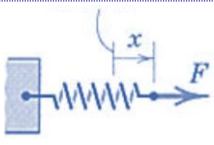
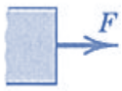
$$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$$

Apesar de todos os corpos serem tridimensionais, podemos tratá-los, em sua maioria, como bidimensionais quando as forças às quais estão submetidos atuam em um único plano ou podem ser projetadas em um plano somente; essa é uma facilitação muito empregada em questões de engenharia.

Antes de partirmos para aplicação dos equacionamentos acima descritos nas resoluções de questões, é **fundamental** que você saiba **representar esquematicamente o sistema isolado como um único corpo**. Essa representação é denominada **diagrama de corpo livre (DCL)**. Essa é a primeira etapa e, a meu ver, a mais importante na solução de questões em mecânica.

Para montarmos um diagrama de corpo livre corretamente, é necessária uma especificação completa de todas as forças conhecidas e desconhecidas que atuam no sistema analisado. Assim, devemos saber os **tipos de ligação** entre estruturas e as reações causadas por cada um. Também é importante sabermos os **números de incógnitas envolvidas** em cada tipo de contato. Vejamos a tabela abaixo com os principais tipos de conexão:

TIPO DE CONEXÃO (CONTATO)	REAÇÃO (AÇÃO SOBRE O CORPO A SER ISOLADO)	NÚMERO DE INCÓGNITAS
 Cabo		A força atua fora do membro na mesma direção do cabo sendo uma força trativa. Uma incógnita.
 Rolete		A reação atua perpendicular à superfície onde há o contato. Uma incógnita.
 Rolete ou pino confinado em ranhura sem atrito	 Ou	Uma incógnita. A reação causada atua no sentido perpendicular a ranhura.

		
 <p>Superfície lisa</p>		<p>A força de contato é compressiva e normal a superfície. Uma incógnita. Em superfícies rugosas existirá uma força de atrito tangencial <math>F</math> e uma componente resultante <math>R</math>.</p>
 <p>Pino</p>		<p>Duas incógnitas. As reações são duas componentes no eixos <math>x</math> e <math>y</math>. Quando o pino não tiver liberdade de rotação ele suportará um momento <math>M</math> também.</p>
 <p>Elemento fixo a colar deslizante em uma barra lisa</p>		<p>As reações são o momento <math>M</math> e a força normal à barra. Duas incógnitas.</p>
 <p>Apoio fixo ou engastado</p>		<p>As reações em um engaste são: Força axial <math>F</math>, Força cortante <math>V</math> e momento fletor <math>M</math>. Três incógnitas.</p>
 <p>Atração da gravidade</p>	 <p><math>W=m.g</math></p>	<p>A força resultante de uma massa é o seu peso <math>W</math>, obtido pela multiplicação da massa e da atração da gravidade. Essa sempre será na direção do centro da terra passando pelo centro de massa <math>G</math> do corpo analisado. Uma incógnita.</p>
 <p>Ação de uma mola</p>		<p>A força da mola é trativa se a mola estiver esticada e compressiva se estiver comprimida. A força da mola é obtida pelo produto de sua rigidez <math>k</math> e a distância <math>x</math>, <math>F=k.x</math>. Uma incógnita.</p>

Agora conhecidos os principais tipos de reações exigidos em concursos, vamos definir um passo a passo para a composição de um diagrama de corpo livre.





## DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

1 - Definir os eixos  $x$  e  $y$  com orientação adequada

2 - Definir o sistema a ser isolado.

3 - Desenhar um diagrama que represente o contorno externo do sistema.

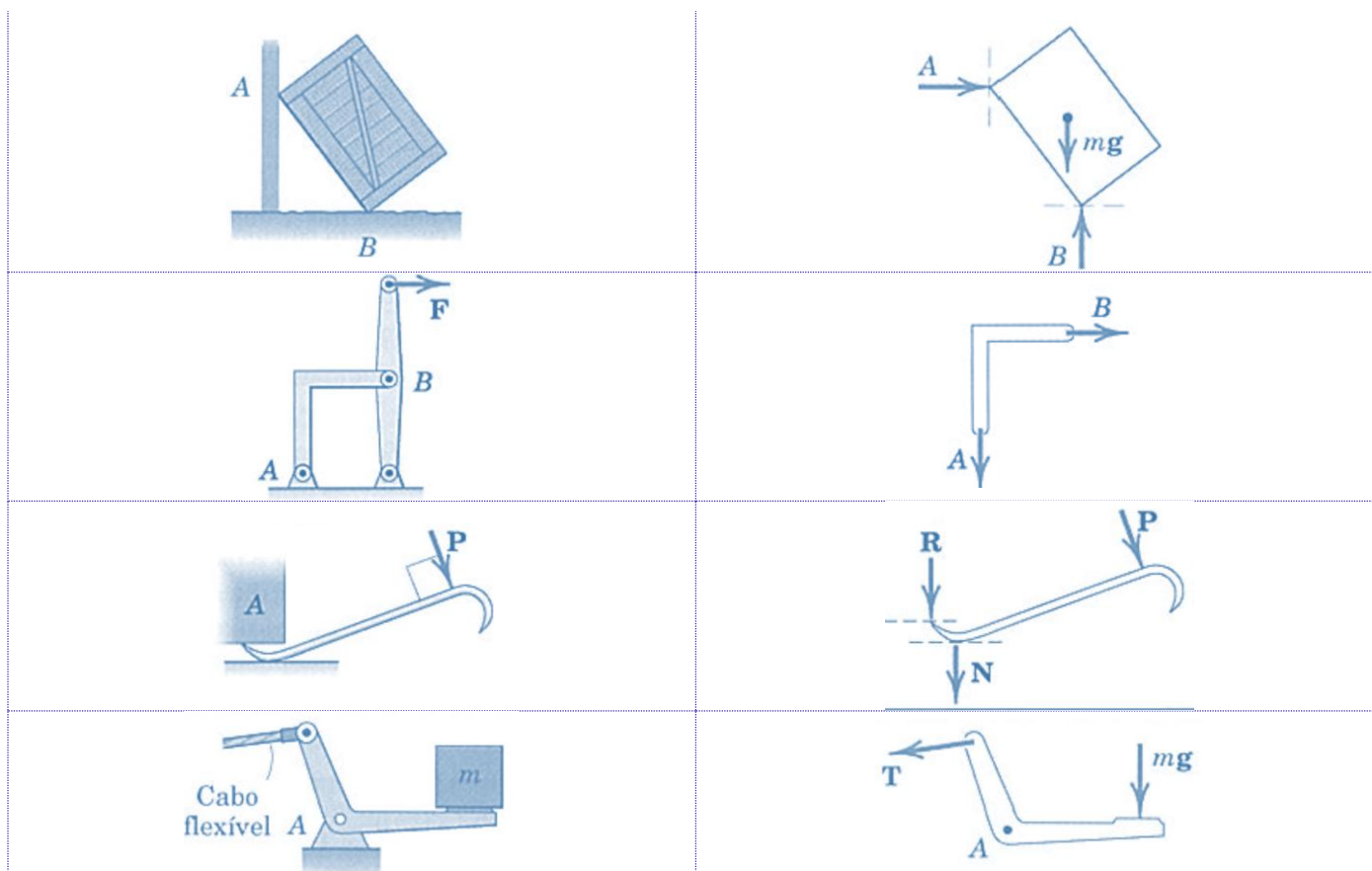
4 - Identificar todas forças, reações, suas intensidades e sentidos conhecidos e supor os desconhecidos.

Caro estrategista, é impreterível que na hora da resolução de questões você tenha em mente um enfoque lógico e sistemático incluindo os passos do DCL. Outra dica importante é sempre analisar o número de incógnitas e de equações independentes que você possui para a resolução. Por fim, sempre busque escolher o ponto de **aplicação de momento** em que passam o **maior número de incógnitas e forças possíveis**.

Não se esqueça de incluir no DCL TODAS as forças que possuem valores obviamente desprezíveis. A tabela abaixo exemplifica o diagrama de corpo livre de vários sistemas.

EXEMPLO DE SISTEMA	DIAGRAMA DE CORPO LIVRE
<p>Massa <math>m</math></p>	





Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige 2008

Após a compreensão das equações de equilíbrio, vamos ao estudo de estruturas de engenharia. Caro estrategista, para um correto entendimento do nosso próximo tópico da aula, é essencial que você possua de maneira clara, em sua mente, todos os conhecimentos dos tópicos estudados até aqui nesta aula. Caso ainda sinta que está faltando algo, recomendo que você resolva algumas questões de nossa bateria no fim da aula e, após a compreensão dos temas anteriores, retome o estudo a partir deste ponto.

Por favor, não hesite em me procurar em nosso fórum de dúvidas para que você não fique com dúvidas para trás. Bora para o estudo de treliças?!?!

## 1.5 – Análise de estruturas

Neste tópico, iremos analisar as forças que atuam internamente em diversas estruturas de engenharia dando enfoque em treliças, suportes e máquinas. A análise das reações desconhecidas nessas estruturas pode ser realizada através da correta concepção do diagrama de corpo livre e aplicação das equações de equilíbrio.



As **treliças planas** são basicamente formadas por **elementos delgados unidos** em suas extremidades. Alguns exemplos de treliças são: pontes (ao lado), tesouras de telhados, guindastes (gruas), entre outros. Diversos materiais podem ser utilizados para a montagem de treliças, dentre eles destacam-se



madeira e metais, sendo que a união dos pontos nas extremidades (nós) dos elementos podem ser via soldagem, rebites, pinos ou parafusos.

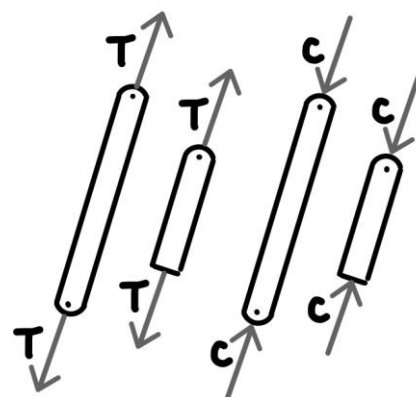
Uma **treliça simples** pode ser formada por **três barras unidas** por pinos em suas extremidades, constituindo uma estrutura rígida. A figura abaixo representa diversos tipos de configurações de treliças que podem ser exemplificadas como treliças planas.



Fonte: Beer (2010)

Para analisarmos uma treliça, é necessária a **obtenção da força** em **cada um de seus elementos**. Nelas todas as cargas são aplicadas aos nós e geralmente o peso dos elementos são desprezados. Contudo, quando o peso deve ser considerado, é comum atribuí-lo como uma força vertical distribuída igualmente entre as extremidades de cada elemento. Por fim, devemos considerar que os elementos que compõe a treliça são interligados entre si por pinos lisos, assim cada elemento atua como uma barra de duas forças.

Se uma força tende a **alongar o elemento**, é denominada força de **tração**; se tende a **comprimi-lo**, chamamos de força de **compressão**. Quando um elemento é comprimido, geralmente deve ser mais espesso que um elemento tracionado, devido a flambagem que ele pode sofrer. A figura abaixo representa forças de tração e compressão em elementos.



Força de tração (T) e força de compressão (C)

Lembre-se de que um elemento sujeito a **tração** está **"puxando"** o nó, e um elemento sujeito a **compressão** está **"empurrando"** o nó. Existem dois métodos para a análise de treliças, que são: métodos dos nós e método das seções.

**Método dos nós:** através da consideração de **equilíbrio em um nó** da treliça, a força sobre um elemento se torna externa em nosso DCL. Assim, podemos aplicar as equações de equilíbrio nos eixos X e Y. Na utilização desse método, primeiro devemos desenhar o diagrama de corpo livre dos nós e depois aplicar as equações de equilíbrio em cada um.

No método dos nós, devemos sempre começar a análise naquele que possui apenas uma força conhecida e não mais que duas desconhecidas. Dessa forma, aplicando as duas equações de equilíbrio ( $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$ ), teremos duas equações algébricas para duas incógnitas.

Para determinarmos o correto sentido de uma força indeterminada, podemos admitir sempre que as forças indeterminadas dos elementos de um nó são de tração, assim, com a correta solução numérica, o **sinal positivo** irá indicar a **força sob tração**, e um **escalar negativo** indicará um escalar **sob compressão**. Outra forma de determinar o sentido correto de uma força desconhecida é através da visualização (inspeção) dos sentidos das forças conhecidas atuantes e da percepção do sentido da força resultante para o sistema se manter em equilíbrio. Isto pode ser obtido através da prática, na resolução de questões.



As **treliças** são muito utilizadas em engenharia pois, suas **barras sofrem esforços axiais**, não havendo transmissão de momento fletor entre seus elementos. As forças são somente de tração ou compressão devido ao fato de todos os pontos que ligam os elementos serem livres de rotação.

Para que uma **treliça seja estável** ela deve satisfazer a seguinte equação:

$$b \geq 2.n - 3$$

Onde b é o número de elementos que compõem a treliça e n é o número de nós.

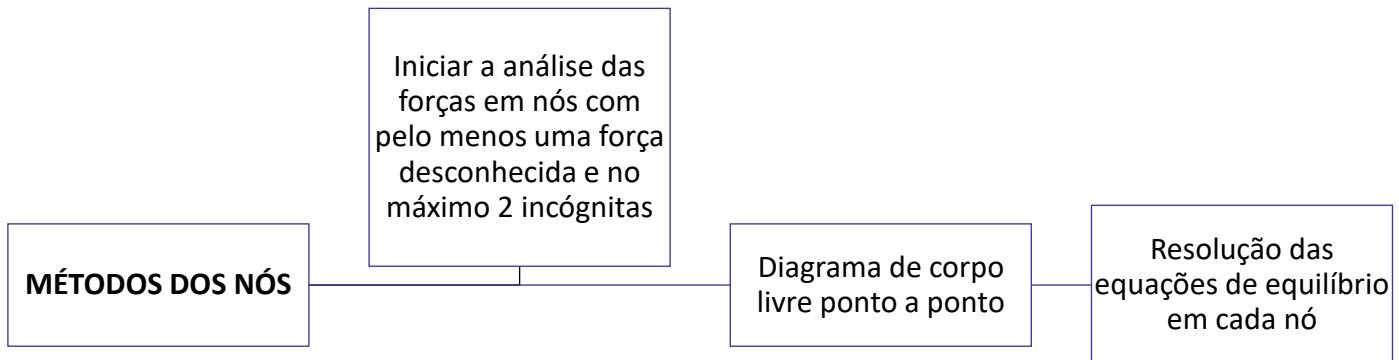
Para análise estrutural de treliças, também existe o **método das seções**. Esse método parte do princípio de que, se um corpo está em equilíbrio, qualquer parte desse corpo também está em equilíbrio. Como o nome do método já diz, podemos utilizá-lo para **seccionar os elementos de uma treliça**. No entanto, como existem apenas três equações de equilíbrio devemos "cortar" uma seção por onde não passem mais do que três elementos com forças desconhecidas.

Esse método pode ser mais **eficaz** em **treliças de grande porte** do que o método dos nós, pois não precisa ser realizada a análise em cada ponto de ligação dos elementos. No entanto, cabe a você, caro concurseiro, a escolha de qual método é o mais adequado para a resolução das questões na hora de sua prova. Como não há grande incidência de questões de treliças em provas de engenharia, acredito que





dominando o **método dos nós**, que na minha opinião é **mais simples**, você já conseguirá acertar as questões sobre o tema. O método das seções será abordado mais adiante nesta aula nos estudos dos efeitos internos.



Por fim, o **método dos nós** desenvolvido para treliças planas também pode ser utilizado para **treliças espaciais**, satisfazendo a equação vetorial  $\sum F = 0$ , para cada nó. Nesse caso, podem estar envolvidas um grande número de equações, em que se torna necessário soluções computadorizadas.

Ainda dentro da análise de estruturas, vamos ao estudo de suportes e máquinas que são estruturas que possuem ao menos um **elemento multiforça**. Esses elementos recebem essa denominação por possuírem **três ou mais forças atuando** sobre si geralmente em direções diferentes dos elementos, portanto não podemos utilizar o método das seções ou nós para realizar a análise destas estruturas.

Para uma resolução facilitada desses tipos de sistemas, devemos realizar o diagrama de corpo livre da seguinte maneira:



### Diagrama de Corpo Livre

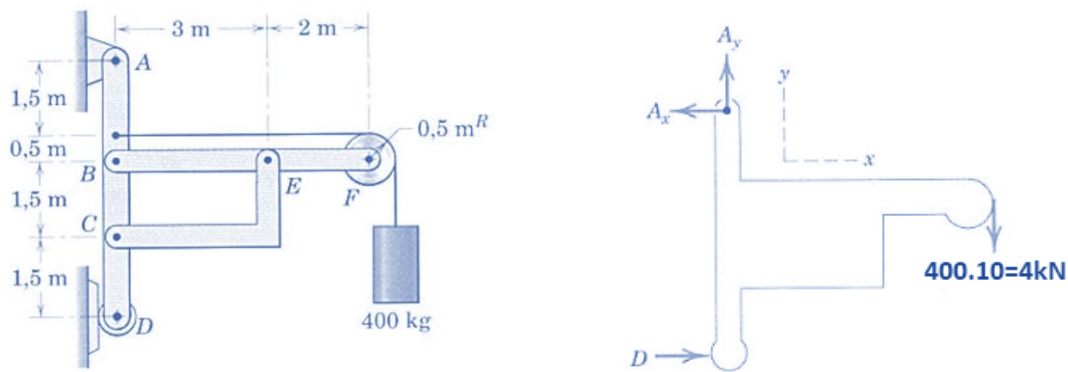
1 - Isolar cada parte da estrutura/máquina e desenhar seu contorno, identificando todas as forças e/ou momentos que estão atuando e determinar o sistema de coordenada x e y. Podemos adotar o sentido de forças desconhecido, caso o sentido adotado for errado no final a intensidade ou momento será negativo.

2 - Desmembrar o suporte e desenhar o DCL de cada elemento.

3 - Contar o número de incógnitas e ver se bate com o número de equações de equilíbrio disponíveis (três no máximo). Aplique as equações de equilíbrio.

**Some os momentos em relação a um ponto onde há o maior número de forças desconhecidas possíveis.**

Vejam os exemplos na figura abaixo em que temos um suporte sustentando uma carga. Desprezando os pesos dos elementos, vamos calcular **todas as forças** que atuam na estrutura, iniciando com o DCL da parte externa.



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Aplicando as equações de equilíbrio e adotando a aceleração da gravidade igual  $10\text{m/s}^2$ , podemos determinar as **reações**, D, Ax e Ay.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(400 \cdot 10) \cdot (2 + 3 + 0,5) + D \cdot (1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,5) = 0 \Rightarrow D = 4,4\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + D = 0 \Rightarrow A_x = 4,4\text{kN}$$

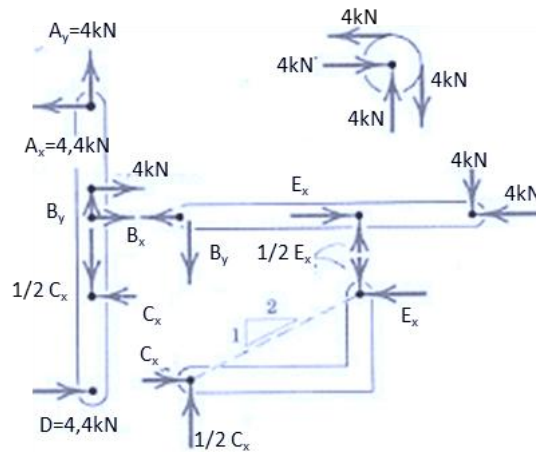
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4\text{kN} = 0 \Rightarrow A_y = 4\text{kN}$$





**DICA:** lembre-se de adicionar a distância do raio da polia na hora de calcular o momento da força peso.

Em seguida, devemos desmembrar cada elemento de nossa estrutura e montar os seus respectivos DCLs. Vejamos:



Fonte: Adaptado de J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Feito isso, podemos aplicar as equações de equilíbrio em cada elemento e calcular todos os esforços do sistema. Analisando o elemento CE, aplicando as equações de equilíbrio, obtemos as seguintes relações:

$$E_y = \frac{1}{2} E_x \text{ e } C_y = \frac{1}{2} C_x$$

O **componente CE** possui reações iguais e opostas, sendo um elemento de **duas forças**.

No diagrama de corpo livre da polia, fica nítido que as **reações no ponto F** são iguais à carga de **tração no cabo**. Conhecidas algumas das forças, vamos a análise do elemento BF:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow B_y \cdot 3 - 4kN \cdot 2 = 0 \Rightarrow B_y = 2,67kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +E_y - B_y - 4kN = 0 \Rightarrow E_y = 6,67kN \text{ logo } E_x = 13,34kN$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -B_x + E_x - 4kN = 0 \Rightarrow B_x = 9,34kN$$

Por inspeção, notamos que os valores de  $E_x$  e  $C_x$  são iguais, assim podemos analisar o elemento AD que nos resta para descobrirmos se todos os esforços calculados na estrutura estão corretos. Para  $T =$  tração no cabo = 4kN, vejamos:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow +A_x \cdot 3,5 - B_x \cdot 1,5 + D \cdot 1,5 - T \cdot 2 = 0$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + B_x + D + T - C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -C_y + B_y + A_y = 0$$

Encerramos assim o estudo das estruturas de engenharia através do estudo de treliças e de estruturas. Passemos ao estudo das forças distribuídas.

## 1.6 – Forças Distribuídas

Caro aluno(a), até o momento, tratamos das forças em nossas aulas apenas como sendo concentradas em um único ponto. Como introdução a esse tópico, vamos abordar as **forças de maneira distribuída**, tentando abordar a real situação de contato. Basicamente existem **três tipos** de forças distribuídas, que são:

**Distribuição linear:** ocorre quando a força está **disposta ao longo de uma linha** como carga vertical em que a carga  $w$  possui a unidade de  $[N/m]$ .

**Distribuição em uma área:** quando uma força está **disposta sobre uma área**, como a pressão que a água exercer sobre as paredes de um balde de água. A intensidade da força é dada em  $[N/m^2]$ .

**Distribuição Volumétrica:** ocorre quando uma força está **distribuída sobre o volume** de um corpo. A força de corpo mais comum é a atração da gravidade. A figura abaixo exemplifica os três tipos de forças distribuídas. Vejamos:



DISTRIBUIÇÃO LINEAR	DISTRIBUIÇÃO AO LONGO DE UMA ÁREA	DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA

Antes de abordarmos a aplicação de forças distribuídas em corpos rígidos e solucionarmos questões de concursos a respeito, devemos conhecer como se é determinado o **centro de gravidade** de um corpo.

Vamos abordar agora a determinação do **ponto em um corpo em que há atuação da força gravitacional**, analisando as propriedades geométricas associadas. Vamos iniciar pelo estudo do centro de massa que é um ponto hipotético onde existe a concentração de toda a massa de um sistema físico e que se movimenta como se todas as forças externas atuassem neste ponto.



Para determinarmos o centro de gravidade de um corpo, matematicamente, usamos o princípio dos momentos ao sistema paralelo das forças gravitacionais. Quando abordamos o campo gravitacional como uniforme e paralelo, podemos adotar o centro de gravidade como o centro de massa de nosso corpo, assim podemos expressar as coordenadas do centro de massa como:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

Para expressar as equações das coordenadas da forma vetorial, adotando  $r = xi + yj + zk$  e  $\bar{r} = \bar{x}i + \bar{y}j + \bar{z}k$ , a seguinte equação é utilizada:

$$\bar{r} = \frac{\int r \cdot dm}{m}$$

Em grande parte dos cálculos da posição do centro de massa via integral, podemos simplificá-los a partir da **correta escolha dos eixos de referência**. Também, quando existir linha ou plano de simetria em um corpo considerado homogêneo, um eixo ou um plano coordenado, estes devem ser considerados como referência.

Em questões de concursos, existe uma maior incidência de questões abordando apenas formas geométricas. Nesse caso, adotamos o termo centroide como se fosse o centro de massa (expressão adotada quando falamos de um corpo físico real).



**Quando a massa específica de um corpo não variar, sendo uniforme em todo o corpo, as posições do centro de massa e do centroide serão idênticas.**

Uma vez que uma **figura ou um corpo** pode ser apropriadamente **dividido em mais de uma parte** cujos centro de massa sejam facilmente determinados, usamos o **princípio dos momentos** e adotamos cada uma dessas partes como um elemento finito do íntegro. Assim, podemos encontrar as coordenadas do centro de massa de um corpo, na direção x, através do **somatório** de cada parte da seguinte forma:

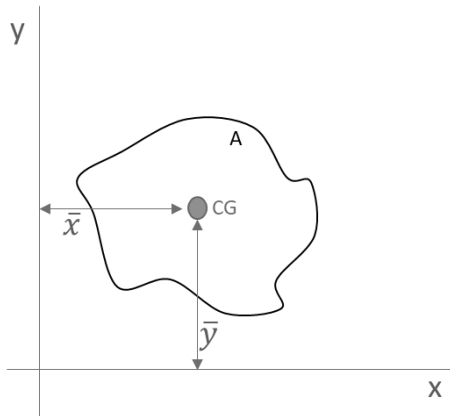
$$\bar{X} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$$

Onde  $\bar{X}$  é a coordenada x do centro de massa do corpo inteiro. Outra forma de expressar o somatório, em que as mesmas relações podem ser adotadas para as coordenadas y e z do centro de massa de um corpo é dada pelas seguintes expressões:

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$$



Relações similares podem ser utilizadas para linhas, áreas e volumes compostos, em que m é substituído por L, A e V respectivamente. Em questões de concursos, há maior incidência de cobrança de centroide para áreas. Vejamos uma representação em que o centroide de uma determinada área pode ser adotado como:



$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$$

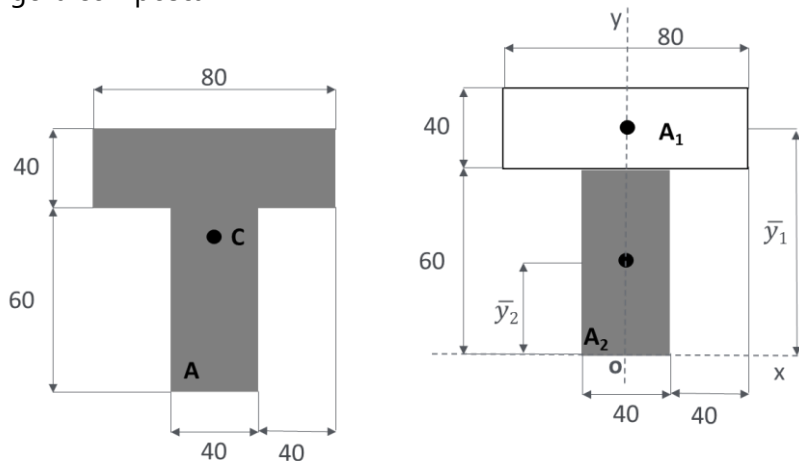
$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$$



Quando um vazio ou cavidade forem tidos como elementos de um corpo ou figura composta, a massa correlata à cavidade ou ao vazio é abordada como uma quantidade negativa.

Vejamos um exemplo de figura composta

como determinar o centroide de uma



Para determinarmos o **centroide** da área indicada, devemos adotar o **eixo de coordenadas** e dividi-la em dois retângulos. Conforme a figura ao lado.

Nota-se que o centroide está localizado no eixo y, pois este é um eixo de simetria. Portanto,  $\bar{X} = 0$ .

Adotando que as dimensões são em milímetros, sabendo que  $\bar{y}_1 =$

80mm e  $\bar{y}_2 = 30mm$  vamos calcular a ordenada Y do centroide da área. Para **simplificarmos**, vamos utilizar uma **tabela** para a realização do cálculo:

	Área [mm <sup>2</sup> ]	$\bar{y}$ [mm]	A. $\bar{y}$ [mm <sup>3</sup> ]
A <sub>1</sub>	40.80 = 3200	80	256 x 10 <sup>3</sup>
A <sub>2</sub>	40.60 = 2400	30	72 x 10 <sup>3</sup>



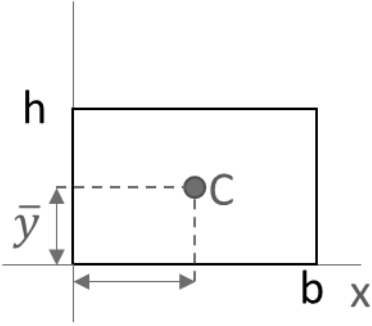
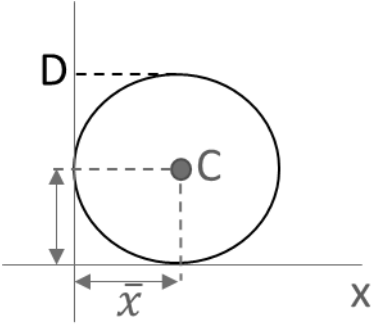
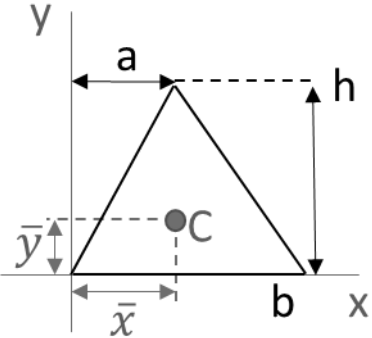
$$\sum A = 5600$$

$$\sum A \cdot \bar{y} = 328 \times 10^3$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A \cdot \bar{y}}{\sum A} = \frac{328 \times 10^3}{5,6 \times 10^3} = 58,6 \text{ mm}$$

Como visto no exemplo, usualmente **questões em provas** que envolvem centroide tratam de **figuras geométricas comuns** como triângulos, retângulos e círculos ou a combinação desses. Como o tempo médio para resolução de questões não pode ser muito grande a ponto de você realizar uma integração durante sua prova, você decorando as coordenadas X e Y desses elementos e sabendo realizar o cálculo das coordenadas C e Y do centroide de figuras compostas, poderá ser o suficiente para a resolução da grande maioria de questões envolvendo centroide de área.

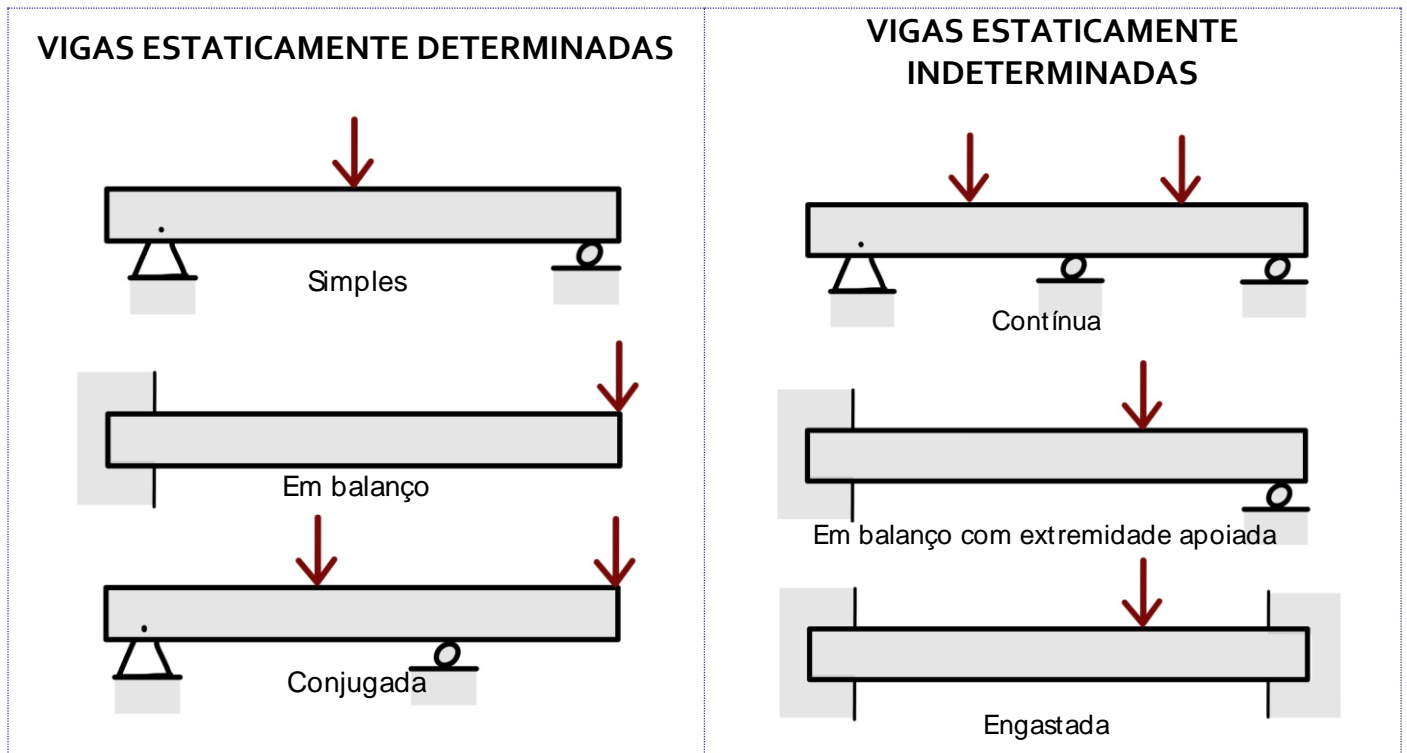
Vejamos a **tabela** abaixo que traz as propriedades das **três principais figuras planas**:

<p style="text-align: center;"><b>Retângulo</b></p> 	$\bar{x} = \frac{b}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{2} \rightarrow A = b \cdot h$
<p style="text-align: center;"><b>Círculo</b></p> 	$\bar{x} = \frac{D}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{D}{2} \rightarrow A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$
<p style="text-align: center;"><b>Triângulo</b></p> 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{3}$

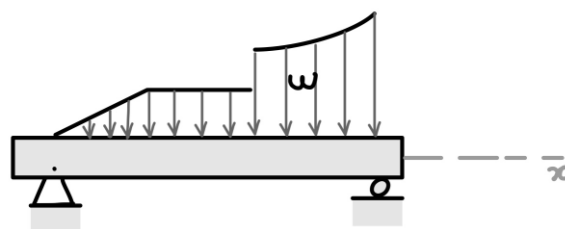


Agora que sabemos determinar o centro de massa de corpos, podemos analisar esforços em vigas com **cargas distribuídas**. Vigas são corpos estruturais que resistem a flexão devido a carga aplicadas, com certeza são os principais elementos estruturais existentes no mundo da engenharia.

Existem dois tipos de **classificação para as vigas**, que são as **estaticamente determinadas e as estaticamente indeterminadas**. As vigas que se encontram apoiadas, de maneira que podemos calcular as reações aos seus apoios externos aplicando somente os métodos estudados até agora na estática, são chamadas de vigas estaticamente determinadas. Vigas que possuem mais pontos de apoios do que o necessário para que estejam em equilíbrio são denominadas estaticamente indeterminadas. Vejamos alguns exemplos:



Podemos também identificar as vigas pelos **tipos de carregamentos externos** qual estão expostas. Estas podem sofrer cargas concentradas, como vistas na figura acima ou distribuídas, conforme a figura abaixo.



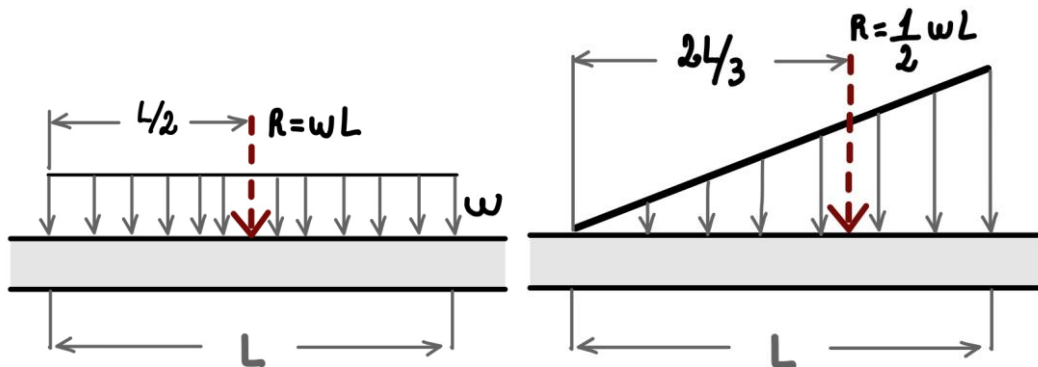
Por fim, a **força resultante da concentração** de uma força distribuída em uma viga sempre estará localizada no **centroide** da área em consideração. Portanto, podemos considerar uma carga distribuída concentrada em apenas uma resultante em um ponto e, assim, poderemos analisar os esforços em uma viga com carga distribuída através de análise estática direta.

A **resultante de uma distribuição de carga** é dada por:



$$R = \int w \cdot dx$$

Vejamos alguns **exemplos de resultantes** para alguns tipos de carregamento na **figura abaixo**, com a possibilidade de redução das cargas distribuídas para apenas um ponto, podemos analisar os esforços em uma viga através da análise estática.



Passaremos agora ao estudo do momento de inércia de figuras planas, tópico esse estreitamente relacionado à definição de centroide.

## 1.7 – Momento de Inércia

Na seção anterior, quando efetuamos o cálculo do centroide de uma área através da integral, consideramos o momento de primeira ordem da área em torno de um eixo. Em alguns casos, no estudo da resistência dos materiais, torna-se necessário calcularmos a integral do **momento de segunda ordem** de uma área, que denominamos de **momento de inércia**. Para uma área inteira o momento de inércia é determinado pelas seguintes integrais:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

Didaticamente falando, temos que, em relação a uma superfície plana de área A referida a dois eixos coordenados x e y, a somatória integral dos produtos dos elementos de área dA pelos quadrados das suas distâncias ao eixo considerado é a definição de momento de inércia.

Também, em algumas situações, podemos nos deparar com a necessidade de expressar o momento de segunda ordem do elemento diferencial **em torno do polo O ou eixo Z**, que é chamado de **momento polar de inércia**. Vejamos:

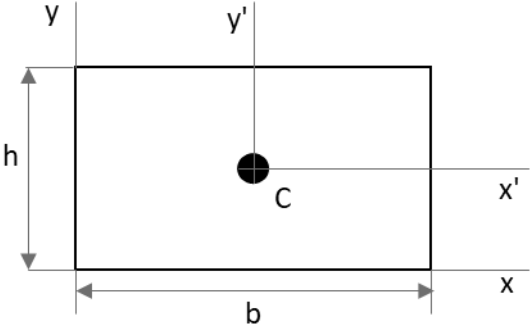
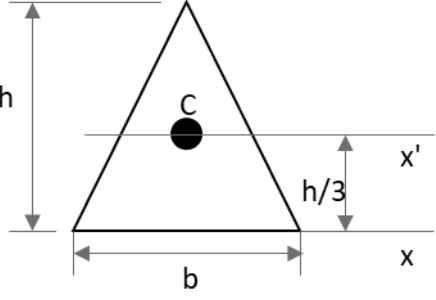
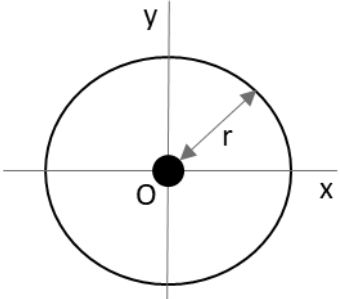
$$J_o = \int r^2 dA = I_x + I_y$$

Onde r é a distância perpendicular entre o polo (eixo z) e o elemento dA.

Os **momentos de inércia sempre serão positivos** e suas unidades sempre serão em alguma unidade de comprimento elevada a quarta potência.



Prezado estrategista, como dito anteriormente, durante sua prova não é comum a necessidade da realização de integrais para a resolução de questões. Portanto, as **fórmulas para calcular o momento de inércia** de uma área simples, de figuras geométricas retangulares e circulares, devem ser **obrigatoriamente de seu conhecimento**. Vejamos a tabela abaixo onde temos os principais momentos de inércia.

	$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_c = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
	$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3; \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3$
	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_o = \frac{1}{2}\pi r^4$

Se o momento de inércia de uma área situada em torno de um eixo centroidal for conhecido, é possível determinar o momento de inércia da área em torno de um **eixo paralelo** correspondente através do **TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS**. Esse teorema é muito utilizado na hora de calcularmos o momento de inércia de **áreas compostas**. As equações que definem o teorema dos eixos paralelos são:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2; \quad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2; \quad J_o = \bar{J}_c + Ad^2$$

Onde A é a área do corpo e d é a distância entre os dois eixos.

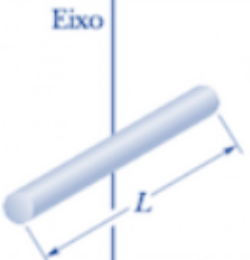

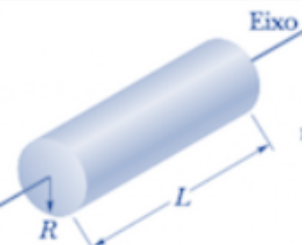
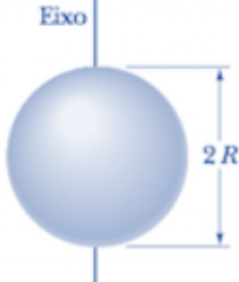
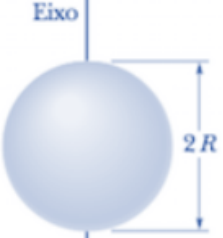
Essas equações definem que o momento de inércia de uma área em torno de um eixo é igual ao momento de inércia em torno de um eixo paralelo que passa pelo centroidal, somado ao produto entre a área e o quadrado da distância perpendicular entre os eixos. Para finalizar, devemos ter em mente que o **teorema dos eixos paralelos** só pode ser utilizado se **um dos eixos for um eixo centroidal**.





O momento de inércia de uma figura plana composta em relação a qualquer eixo particular é a soma dos momentos de inércia de suas partes em relação a esse mesmo eixo.

Por fim, vejamos uma tabela com as equações para o cálculo de **momento de inércia de massa** de um corpo distribuída em seu volume de acordo com as características geométricas destes.

FORMATO DO CORPO	MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA
 <p>Barra esbelta de comprimento (L).</p>	$I_y = I_z = \frac{1}{12} m \cdot L^2$
 <p>Anel fino em torno de um eixo central</p>	$I = M \cdot R^2$
 <p>Cilindro circular de raio a e comprimento (L).</p>	$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$
 <p>Esfera de maciça de raio (r).</p>	$I = \frac{2}{5} M \cdot R^2$
 <p>Casca esférica fina em torno de um diâmetro</p>	$I = \frac{2}{3} M \cdot R^2$

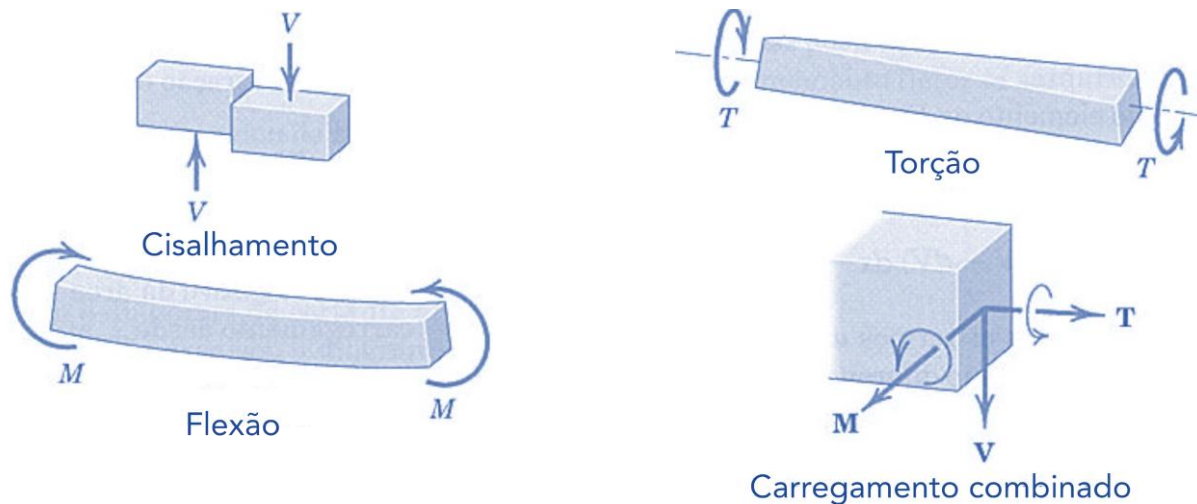
Caro aluno(a), encerramos aqui o estudo de momento de inércia a passaremos ao estudo dos efeitos internos a qual vigas estão expostas.



## 1.8 – Vigas - Efeitos Internos

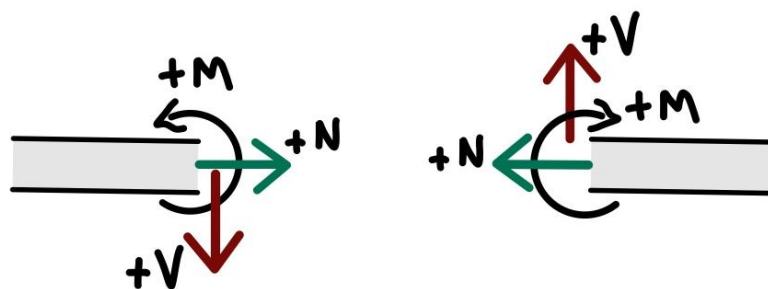
Após estudarmos como podemos reduzir uma força distribuída em uma ou mais forças concentradas e também a determinação das reações externas atuantes em um corpo, passaremos agora ao estudo dos esforços internos sofridos por um corpo a partir dos princípios da estática.

Uma **viga**, além de suportar tensões trativas e compressivas, **pode estar sujeita a cisalhamento, flexão e torção**, conforme a figura abaixo podemos perceber como cada tipo de esforço age sobre o corpo rígido.



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

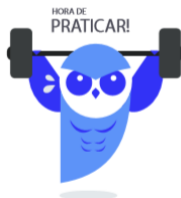
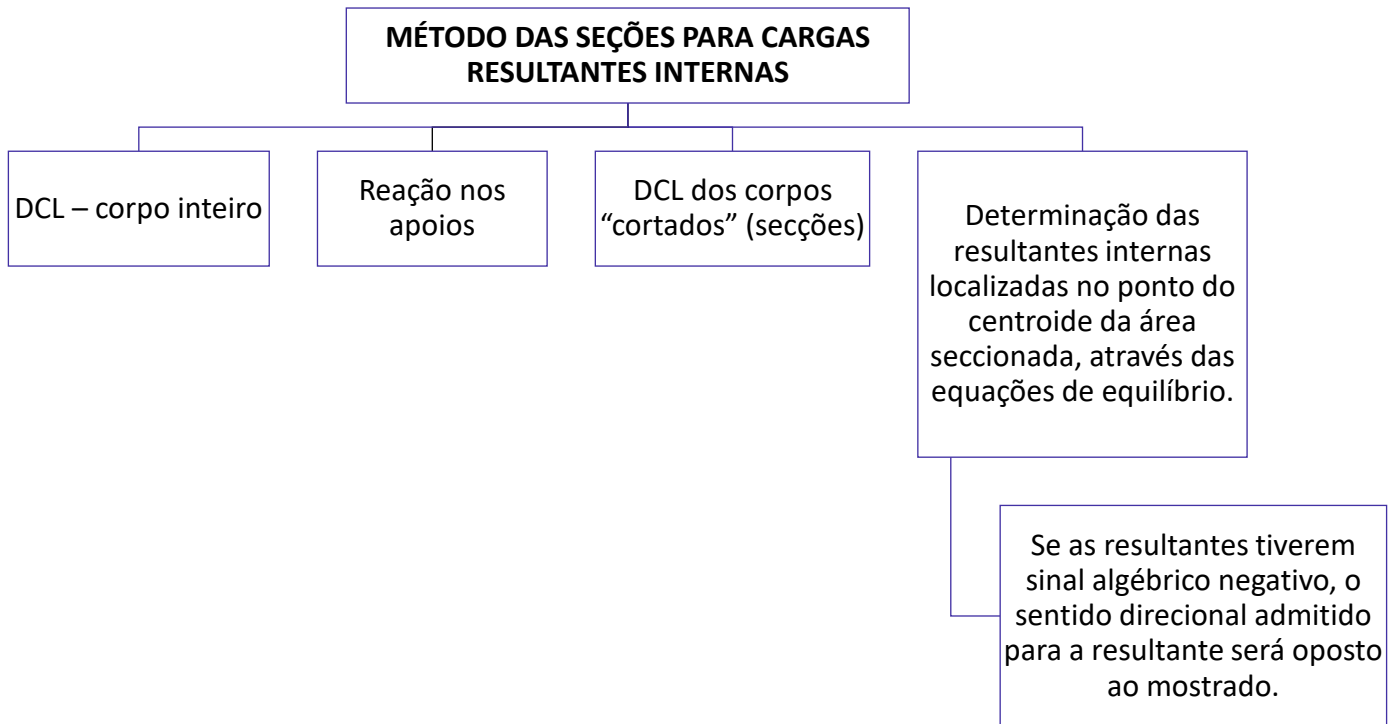
De acordo com a figura acima, a **força  $V$**  é denominada **força cisalhante ou cortante**. O **momento  $M$**  é chamado **momento fletor** e o **binário  $T$**  é denominado de **momento torçor**. Geralmente as **convenções de sinais** das forças cortantes  $V$  e dos momentos fletores  $M$  são dadas conforme a **figura abaixo**.



Além do momento fletor e da força de cisalhante, um corpo está sujeito a **força normal  $N$** , que age perpendicularmente à área conforme a figura acima.

Conforme a montagem do DCL e com o desenvolvimento dos cálculos, os sinais algébricos indicarão o correto sentido de cada uma dessas grandezas. Vamos a resolução de uma questão exigida em concurso, como exemplo, para determinação dos esforços internos em uma viga.





(CESGRANRIO/PETROBRAS-2017) Uma viga de aço e seção retangular igual a 20 mm x 10 mm e comprimento igual a 500 mm falhou ao receber seu carregamento de trabalho. Sabe-se que essa viga teve uma de suas extremidades soldada perpendicularmente à superfície de uma coluna vertical de perfil H, enquanto a outra extremidade permaneceu em balanço. Um técnico, ao analisar as condições de carregamento dessa viga, para identificar as razões de sua falha, precisou calcular o momento fletor ao longo da viga. A viga trabalha sob uma carga uniformemente distribuída de 25 N/mm.

Qual o valor do momento fletor no engastamento, em Nm?

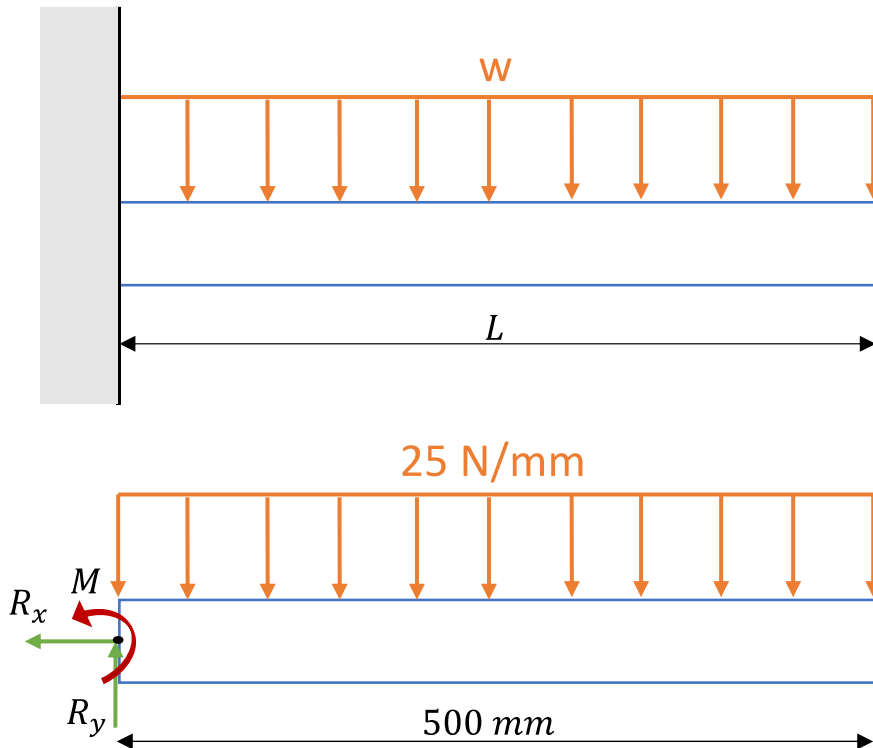
- a) 7.500
- b) 6.250
- c) 5.000
- d) 4.750



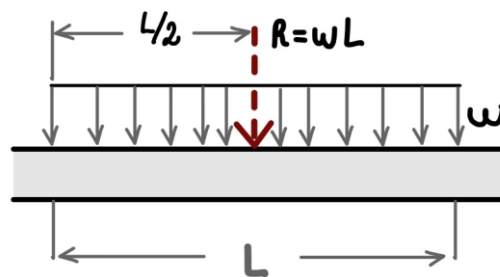
e) 3.125

**Comentário:**

Caro(a) aluno(a), nesta questão a banca traz os dados da seção retangular da viga tentando confundir o candidato com dados extras. Basicamente temos uma viga engastada e devemos calcular o momento fletor no engaste. Vejamos como se dá a correta concepção do sistema e o seu diagrama de corpo livre, conforme dados do enunciado.



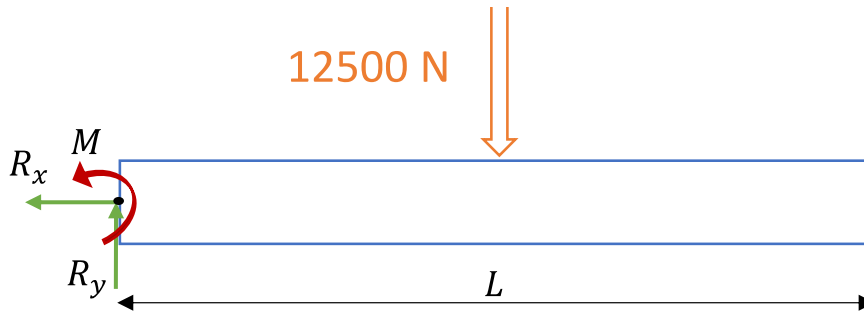
A **força resultante da concentração** de uma força distribuída em uma viga sempre estará localizada no **centróide** da área em consideração. Neste caso temos um retângulo que possui seu centróide no centro de seu comprimento que é  $250\text{ mm}$ . Além disso, a resultante é igual a carga distribuída multiplicada pelo seu comprimento. Vejamos:



$$R = w \cdot L = 25 \left[ \frac{N}{mm} \right] \cdot 500 [mm] = 12500\text{ N}$$

Desta forma o D.C.L. com a carga resultante será dado pela seguinte forma:





Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Assim, o momento no ponto O, para esta viga estática que deve respeitar a equação do equilíbrio para o momento, onde está o engaste será:

$$\sum_{\curvearrowright} M_o = 0 \Rightarrow M - 12500 [N] \cdot 0,25 [m] = 3125 [N \cdot m]$$

Note que a banca pede a resposta em newton.metro, logo devemos realizar a conversão da unidade da distância de milímetros para metros. Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Finalizamos aqui o estudo da estática. Caso tenha ficado alguma dúvida **retome o tópico**, respire fundo e de mais uma lida, se precisar sintá-se à vontade para me procurar que iremos sanar todas as dúvidas. Passaremos agora para a resistência dos materiais!

## 2 – Resistência dos Materiais

### 2.1 – Tensão

Na seção 1.7 desta aula estudamos os efeitos internos em um corpo. Neste tópico da nossa aula, estudaremos a **tensão** que descreve a intensidade da força interna sobre uma área (plano específico) que passa por um ponto.<sup>2</sup> Existem **dois tipos de tensão** que são **tensão normal e tensão de cisalhamento**.

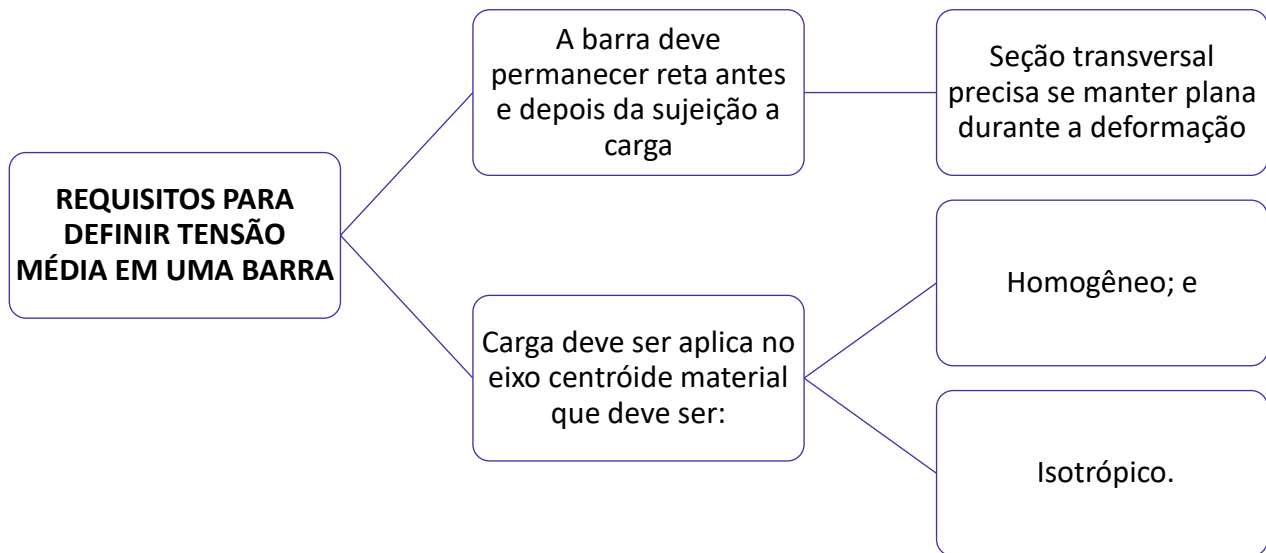
A **tensão normal** é aquela que **age perpendicularmente** a uma área. Se ela tracionar o plano (área) será chamada de tensão de tração. Caso ela comprima o elemento de área será denominada tensão de compressão.

Para se determinar a tensão média em uma barra com carga axial devemos partir de duas premissas que são:

<sup>2</sup> R.C. Hibbeler – Resistência dos Materiais.



- 1 - A barra deve permanecer reta antes e depois da aplicação da carga. Também a seção transversal precisa se manter plana durante a deformação.
- 2 - Para haver uma deformação uniforme na barra é preciso que a carga seja aplicada ao longo do eixo do centroide do material e que esse seja homogêneo e isotrópico.



**Materiais homogêneos** são aqueles que tem as **mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume**. **Materiais isotrópicos** são aqueles que possuem as **mesmas propriedades em todas as direções**. Logo, materiais anisotrópicos possuem propriedades diferentes em direções diferentes, e ainda a anisotropia pode ser orientada ao longo do eixo da barra, sendo assim a barra se deformará uniformemente quando submetida a uma carga axial.

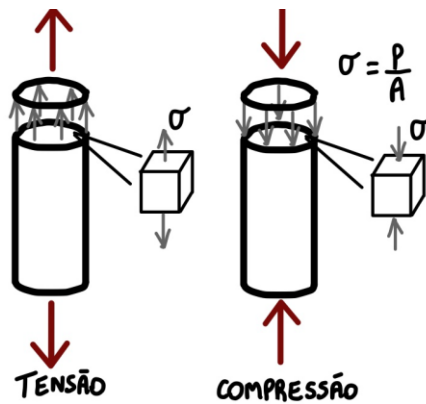
Conhecidas as condições para o cálculo da **tensão média**, ou **tensão verdadeira**, podemos defini-la pela seguinte equação:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Onde:  $\sigma$  = tensão normal média; P = força normal interna resultante, determinada pelo método das seções; e A = Área da seção transversal da barra.

Vejamos uma figura ilustrando as tensões normais de tração e compressão em uma barra.





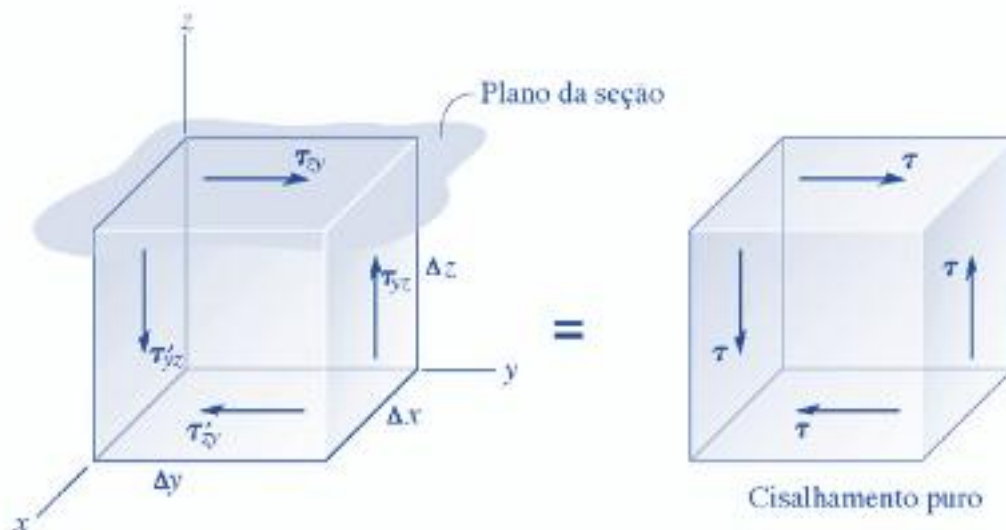
**Tensão de cisalhamento** é aquela que **age tangencialmente a área**, ou seja, é aquela que age no plano da área seccionada. Uma tensão de cisalhamento aplicada a um material homogêneo e isotrópico **produzirá somente deformação por cisalhamento** no mesmo plano. Logo, a tensão de cisalhamento média é definida por:

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A}$$

Onde  $\tau_{méd}$  = tensão de cisalhamento média; V = Força de cisalhamento interna.; e A = área da seção.

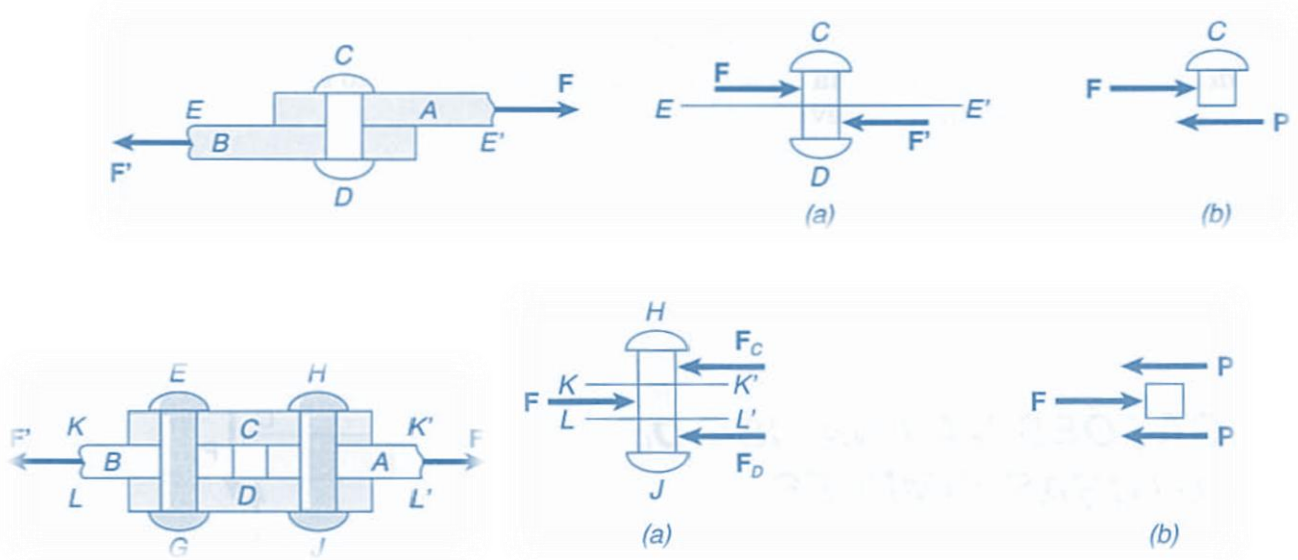
Existem **dois tipos de cisalhamento**, que são o cisalhamento **simples** e o cisalhamento **duplo**. No cisalhamento simples, os acoplamentos de cisalhamento simples são denominados de juntas sobrepostas onde V=F. Já no cisalhamento duplo, o acoplamento é realizado por juntas de dupla superposição em que V=F/2.

Por fim, a **propriedade complementar do cisalhamento**, sob as condições mostradas, nos diz que todas as **quatro tensões de cisalhamento** devem ter valores iguais e serem **direcionadas no mesmo sentido ou em sentido oposto** uma das outras nas bordas opostas do elemento. Vejamos uma figura que ilustra o cisalhamento:



Analisando a imagem, notamos que o equilíbrio de forças e momentos fazem com que a tensão de cisalhamento, agindo sobre a face superior do elemento, seja acompanhada pelas demais tensões que agem sobre as outras três faces.

Cabe destacar, para finalizarmos o assunto de tensão de cisalhamento, que os **elementos** que mais sofrem com esse tipo de tensão são **pregos, parafusos, rebites e pinos** que ligam as diversas partes de estruturas e máquinas. Vejamos um exemplo de cisalhamento simples e duplo. No primeiro caso as chapas AB são interligadas pelo rebite CD. Já no segundo caso (cisalhamento duplo) as chapas CD são utilizadas para conectar as chapas A e B.



Fonte: F.P. Beer E.Russel Johnston Jr.



### Cisalhamento

- Fenômeno de deformação ao qual um corpo está sujeito quando as forças que sobre ele agem provocam um deslocamento em planos diferentes, mantendo o volume constante

Prezado estrategista, agora que conhecemos os conceitos de tensão normal e tensão de cisalhamento, podemos passar para o estudo da **tensão admissível**. Esta é utilizada para se restringir a tensão atuante no material a um nível seguro para que não ocorra a sua ruptura. Basicamente devemos **restringir a carga atuante** no material a uma que seja menor ao que esse possa suportar totalmente. Além disso o material pode vir a se desgastar com o tempo e sofrer com outras variáveis que possam vir a diminuir sua resistência gradativamente.



Para determinarmos a tensão admissível de um componente, utilizamos o **fator de segurança (FS)**, que nada mais é que a **razão entre a carga de ruptura e a carga admissível**. Quando a carga for linearmente relacionada com a tensão atuante no interior do elemento, podemos expressar o fator de segurança matematicamente pelas seguintes expressões:

$$FS = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} \quad e \quad FS = \frac{\tau_{rup}}{\tau_{adm}}$$

**Sempre** devemos adotar o FS como um valor **maior do que 1** para evitarmos falhas no material. Além disso a correta escolha do fator de segurança para diferentes aplicações deve levar em consideração sempre alguns fatores como os que seguem:

- Modificações que ocorrem nas propriedades dos materiais durante a fabricação das peças.
- A fadiga do material, que ocorre quando um material é submetido a tensões ou deformações cíclicas. Isto nada mais é que o número de vezes que a carga será aplicada durante a vida útil da estrutura ou máquina.
- O tipo de carregamento a qual a máquina ou estrutura estará sujeita. (cíclico, dinâmico, instantâneo...)
- O modo de ruptura que pode ocorrer de acordo com as características do material. Materiais frágeis, que sofrem ruptura repentina, devem apresentar um coeficiente de segurança maior do que materiais dúcteis, pois estes apresentam uma deformação antes da falha.
- Deterioração devido à falta de manutenção ou por causas imprevisíveis.
- A importância do componente. Peças vitais devem apresentar um FS maior do que componentes secundários.
- Deformações plásticas causadas por fluência, pois quando uma peça ou estrutura é submetida, por longos períodos a tensões constantes inferiores a tensão de ruptura elas podem sofrer algum tipo de deformação permanente. Pode ser ativada pela temperatura elevada e se manifesta com o passar do tempo.

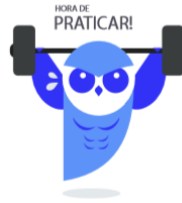


### FATORES PARA A ESCOLHA DO FS

- Modificações nas propriedades dos materiais durante a fabricação das peças;
- A fadiga do material;
- O tipo de carregamento;
- O modo de ruptura que pode ocorrer;
- Deterioração devido à falta de manutenção ou por causas imprevisíveis;
- A importância do componente;
- Deformações plásticas causadas por fluência.



Para encerramos a seção 2.1 de nossa aula, os **fatores de segurança** geralmente são **adotados** de acordo com as **normas técnicas e códigos** de construção escritos por comitês. Com isso finalizamos o estudo das tensões. Agora vamos ao estudo das deformações.



(CESGRANRIO/ELETRONUCLEAR-2022) Chama-se tensão admissível a tensão utilizada como máxima no dimensionamento de componentes mecânicos, cujo valor é obtido da divisão da tensão considerada perigosa por um fator denominado de segurança.

O fator de segurança a ser aplicado no cálculo carrega as incertezas e a invariabilidade, tais como previsões do projeto, carregamento imprevisivelmente conhecido, etc. A experiência do projetista e dados experimentais também são fundamentais para determinar o valor do fator de segurança e, conseqüentemente, melhorar o dimensionamento, deixando o projeto seguro e econômico.

Nesse contexto, o fator de segurança indica

- A) a tensão máxima a ser aplicada ao projeto.
- B) a tensão em função da qual o material tenderá a falhar quando aplicada uma carga.
- C) quantos ciclos de carga variada o componente pode suportar.
- D) quantas vezes pretende-se que o projeto esteja longe da falha.
- E) a deformação máxima a ser aplicada ao projeto.

#### Comentário:

O fator de segurança (FS) é um coeficiente utilizado no dimensionamento de componentes mecânicos para garantir que a tensão aplicada esteja abaixo da tensão considerada perigosa (tensão de escoamento, ruptura ou fadiga, dependendo do critério adotado). Ele representa uma margem de segurança para lidar com incertezas no carregamento, variações nos materiais e possíveis erros de projeto. Veja como esse fator é calculado.

$$FS = \frac{\sigma}{\sigma_{adm}}$$

Assim, se um projeto possui um fator de segurança de 2, significa que a tensão admissível é duas vezes menor do que a tensão que levaria o material à falha, garantindo que o componente esteja operando dentro de uma margem segura.

Ou seja, o fator de segurança representa quantas vezes o projeto está longe da falha. Portanto, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.



## 2.2 – Deformação e Propriedades dos Materiais

Prezado aluno(a), quando sujeitamos um corpo a algum tipo de carga, esse corpo pode sofrer **alterações em seu tamanho ou formato**. Essas alterações são denominadas **deformações** que podem ou não serem visíveis. Por exemplo uma borracha pode sofrer uma grande deformação ao ser esticada enquanto uma ponte sofre uma pequena deformação enquanto os veículos atravessam a sua extensão. Além de deformações por carregamentos existem as deformações ocasionadas por variação de temperatura.

A **deformação normal** é aquela em que ocorre o **alongamento ou contração** de um material por unidade de comprimento. Matematicamente definimos a deformação normal média como:

$$\epsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

Em que,  $\epsilon_{méd}$  = deformação normal média;  $\Delta s$  = comprimento original do material; e  $\Delta s'$  = comprimento do material após deformação.

Para se determinar a **relação entre a tensão normal média e a deformação normal** média de materiais metálicos, cerâmicos, poliméricos e compósitos, utiliza-se o **ensaio de tração ou compressão**. Basicamente um corpo de prova com dimensões padronizadas é colocado em uma máquina de testes em que o material será alongado lentamente até atingir sua tensão de ruptura.

Nesse ensaio, a carga aplicada é dada pela máquina e a partir do corpo de prova, podemos obter o **alongamento** ( $\delta = L - L_0$ ) deste, que é a **diferença entre o comprimento final e o inicial**. Com os dados obtidos no ensaio de tração também é possível calcular os valores da **tensão nominal ou tensão de engenharia** através da divisão entre a grandeza da carga aplicada (P) e a área da seção transversal do corpo de prova  $A_0$ . Vejamos:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

Analogamente, podemos obter a **deformação nominal ou deformação de engenharia** do material pela divisão da variação do comprimento ( $\delta$ ), pelo comprimento inicial deste  $L_0$ . Assim, considerando a deformação constante, podemos determiná-la pela seguinte expressão:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Através desses valores de tensão e deformação nominal, podemos plotar o **gráfico de tensão deformação de um material**. Esse gráfico é denominado **diagrama-tensão deformação** convencional, que é muito utilizado na engenharia mecânica para a determinação das propriedades de resistência a tração e compressão de um material, independentemente de sua forma geométrica. No diagrama de tensão-deformação é possível analisarmos alguns modos de comportamentos do material que são:

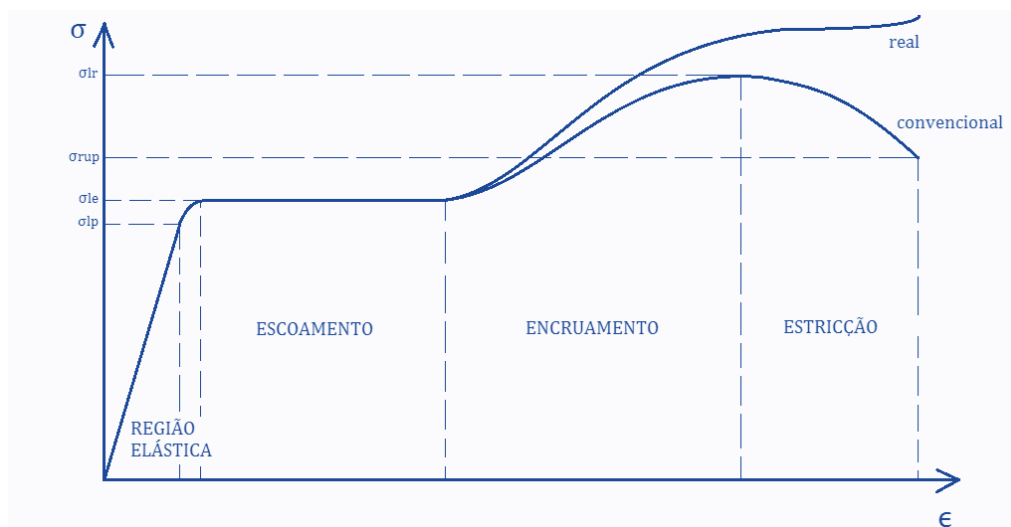
**Comportamento elástico:** região da curva em que o **material é linearmente elástico**, ou seja, quando a carga for retirada ele retorna a seu formato original. Esta fase elástica se estende até se atingir o limite de proporcionalidade do material.



**Escoamento:** região da curva tensão X deformação onde o material atinge o seu **limite de escoamento** ocorrendo deformação plástica no material, isto indica que esse se **deformou permanentemente** resultando no seu colapso.

**Endurecimento por deformação:** após o término do escoamento do material é possível a aplicação de uma carga adicional ao corpo de prova resultando em uma **curva crescente até** se alcançar o limite de **resistência do material**. Esse crescimento da curva é denominado endurecimento por deformação.

**Estricção:** após se atingir o limite de resistência do material a **área da seção transversal** do corpo de prova **reduz em uma região localizada**. Como resultado, ocorre uma "estricção" gradativa nesta região por deformação causada por tensão de cisalhamento e devido a essa redução da área este passa a suportar uma carga decrescente até se atingir a tensão de ruptura do material. Vejamos o diagrama de tensão deformação.



Quando são calculados os valores de tensão e deformação a partir da área da seção transversal e o comprimento do corpo de prova no instante em que a carga é medida, obtemos a curva tensão X deformação real exemplificada na figura acima. Apesar de o diagrama de tensão-deformação convencional e real serem diferentes, a maioria dos estudos e projetos são voltados para dentro da região elástica do material.

Existem **dois** tipos de **comportamentos de materiais** demonstrados pelo diagrama de material, havendo assim a sua classificação em **materiais dúcteis ou materiais frágeis**. Os **dúcteis** são aqueles que **podem sofrer grandes deformações** antes de se romperem. Podemos obter a ductilidade de um material através do percentual de alongamento deste, calculado através da seguinte expressão:

$$\text{Percentual de alongamento} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0} \cdot (100\%)$$

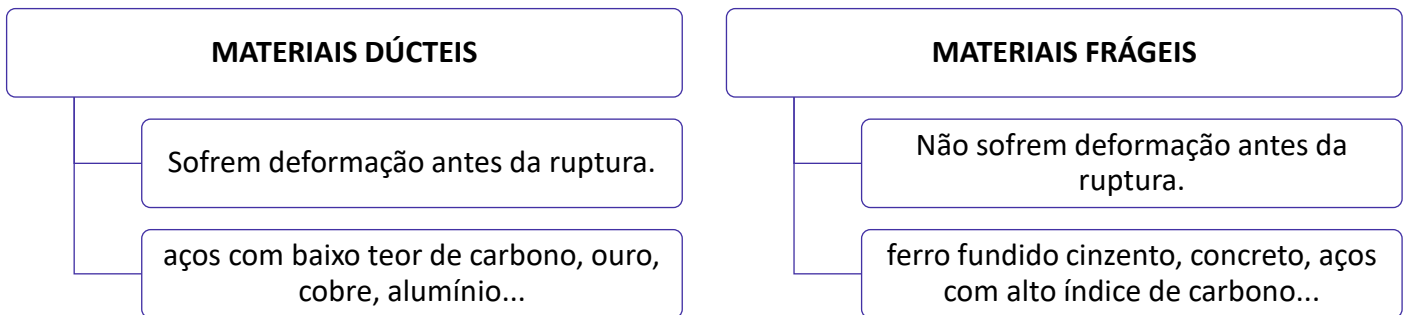
Da mesma maneira podemos calcular o percentual de redução de área do material a partir da expressão:



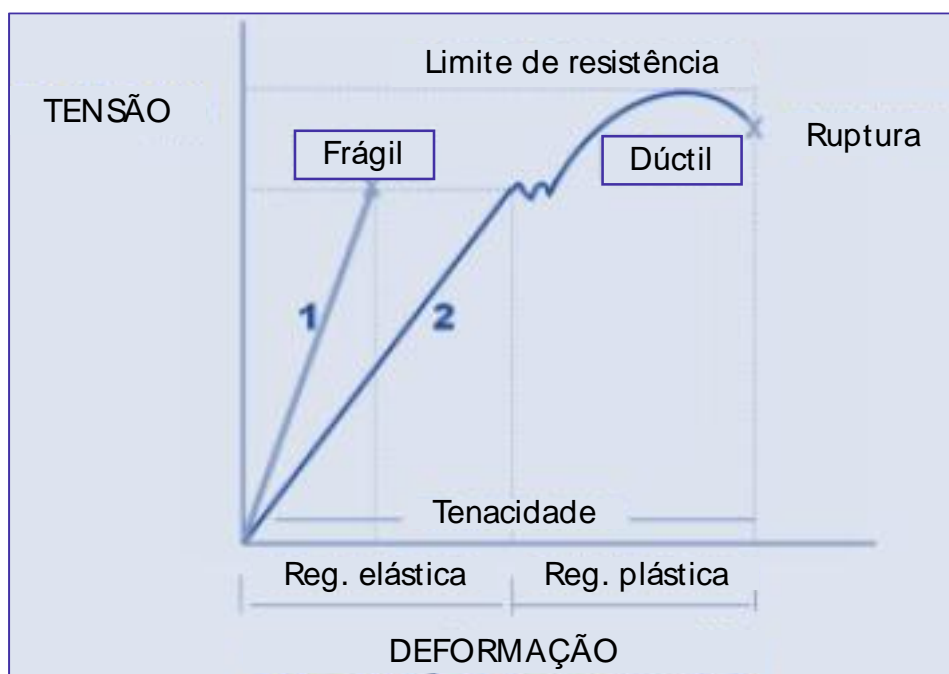
$$\text{Percentual de redução de área} = \frac{A_{rup} - A_0}{A_0} \cdot (100\%)$$

Os aços com baixo teor de carbono possuem características dúcteis.

Já os **materiais frágeis** são aqueles que **não apresentam escoamento ou deformação** antes de se romperem. Nesses materiais, a tensão de ruptura do material se torna de difícil obtenção, assim geralmente a partir do diagrama tensão-deformação desse material é obtida a tensão de ruptura média através da realização de mais de um ensaio de tração. Alguns exemplos de materiais frágeis são o ferro fundido cinzento, o concreto, aços alto carbono...



Vejamos a diferença entre os diagramas de tensão deformação de materiais dúcteis e frágeis.



Note que os materiais frágeis são materiais que apresentam pequena ou nenhuma deformação antes de sua ruptura. Diferentemente dos materiais dúcteis os materiais frágeis respondem de maneira diferente para tensões de tração e compressão, sendo que geralmente eles resistem melhor a compressão.

Ainda em relação ao gráfico, temos que a tenacidade é dada pela área sob a curva tensão deformação e o módulo de resiliência ( $u_R$ ) que representa a capacidade do material de absorver energia sem deformação permanente é dado pela área sob a região elástica e pode ser calculado matematicamente por:

$$u_R = \frac{\sigma_{esc}^2}{2 \cdot E}$$

Em que E é o módulo de elasticidade do material e  $\sigma_{esc}$  é a tensão de escoamento do material e a unidade do módulo de resiliência é joule por metro cúbico. ( $J/m^3$ )

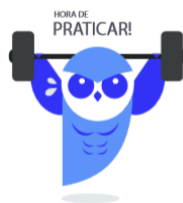
Dando sequência!

Prezado concursado(a), a partir da constatação no diagrama de tensão deformação da maioria dos materiais, da existência de um comportamento linear da curva, na região elástica, Robert Hooke, em 1676, analisou que existe uma **relação de proporcionalidade entre o aumento de tensão e o aumento de deformação** e assim apresentou a **Lei de Hooke** expressada matematicamente por:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material ou módulo de Young. Esta é uma das **propriedades mecânicas** mais importantes no estudo da resistência dos materiais e só pode ser utilizado quando o material apresentar um **comportamento linear**.

A **lei de Hooke** estabelece que quanto maior for a carga normal aplicada e o comprimento inicial da peça, maior será o alongamento e que quanto maior for a área da secção transversal e a rigidez do material, medido através do seu módulo de elasticidade, menor será o alongamento.



(CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) A Lei que estabelece uma relação linear entre tensão e deformação para o comportamento elástico de um material dúctil é a Lei de

- A) Newton
- B) Fourier
- C) Ohm



D) Pascal

E) Hooke

#### Comentário:

Prezado concursado(a), a Lei de Hooke estabelece uma relação linear entre a tensão ( $\sigma$ ) e a deformação ( $\varepsilon$ ) no regime elástico dos materiais, sendo expressa matematicamente por:

$$\sigma = E\varepsilon$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade ou módulo de Young, uma das propriedades mecânicas mais relevantes no estudo da resistência dos materiais.

Essa lei, formulada por Robert Hooke em 1676, baseia-se na observação de que, no diagrama tensão-deformação, a curva apresenta um comportamento linear na região elástica, indicando uma proporcionalidade entre o aumento de tensão e o aumento de deformação.

No contexto da resistência dos materiais, a Lei de Hooke permite compreender que:

Quanto maior a carga normal aplicada e maior o comprimento inicial da peça, maior será o alongamento.

Quanto maior a área da seção transversal e maior a rigidez do material (maior  $E$ ), menor será o alongamento.

Constatamos então que a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Prosseguindo!

Existem diversas propriedades mecânicas de materiais, que indicam o comportamento mecânico deles e demonstram a sua resposta à deformação ou a uma carga aplicada. As propriedades mecânicas dos materiais são determinadas por experimentos em laboratórios.

Para se determinar as propriedades dos materiais, devem ser considerados diversos fatores como a natureza da carga aplicada, a duração, as condições ambientais, intensidade da carga, temperatura de serviço, tempo de aplicação da carga, entre outros.

Para prova, vamos abordar as propriedades diretamente, assim você deve ter em mente as seguintes definições:

**Resiliência:** capacidade que o material possui para **absorver energia em sua região de comportamento elástico**.

**Tenacidade:** capacidade que o material possui para **absorver energia até a sua ruptura**, nada mais é do que a energia mecânica necessária para se levar um material ao rompimento.

**Elasticidade:** capacidade que o material possui para se deformar, ao ser submetido a uma carga, e **retornar a sua forma original** após a retirada dos esforços.

**Ductibilidade:** capacidade que o material possui para **deformar-se plasticamente** até o seu rompimento.

**Plasticidade:** capacidade de o material se **deformar na região plástica**, onde ele sofrerá deformação permanente.





**Dureza: resistência que o material oferece à penetração de um corpo duro.** Para se determinar a dureza máquinas especiais, são utilizadas e existem diferentes métodos e escalas para tal. Os métodos mais utilizados são: Brinell, Vickers e Rockwell.

**Rigidez: é a capacidade que um material possui à deformação quando submetido a uma força.** Nada mais é do que uma qualidade inerente ao material e é medida pelo módulo de elasticidade do material.

Agora que conhecemos as principais propriedades mecânicas dos materiais obtidas através do ensaio de tração, podemos determinar o **coeficiente de Poisson**. Uma vez que dentro da faixa elástica, submetemos um corpo a uma força de tração axial este tende a sofrer **alongamento e contração lateralmente**. Pense em uma tira de borracha quando esticada o comprimento desta aumenta enquanto sua largura diminui.

Analogamente, quando aplicamos uma tensão trativa em uma barra ocorre um aumento de seu comprimento e uma redução de seu raio, assim a deformação axial ou longitudinal e a deformação lateral ou radial podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \text{ e } \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$$

A **razão entre** essas deformações é constante e assim podemos determinar o **coeficiente de Poisson** matematicamente pela equação abaixo, que possui sinal negativo devido a contração lateral ser negativa.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}} = \left| \frac{\text{deformação específica transversal}}{\text{deformação específica longitudinal}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Encerramos aqui o estudo das deformações e propriedades dos materiais. Vimos, neste tópico, que através do **ensaio de tração**, realizado em um corpo de prova com dimensões conhecidas, podemos obter o **diagrama de tensão-deformação** do material. Nesse gráfico, a tensão fica no eixo vertical enquanto a deformação está no eixo horizontal e com esses dados diversas propriedades mecânicas do material ensaiado podem ser analisadas.

Caro estrategista, passaremos agora ao estudo de métodos para determinação das reações de apoios quando estas não puderem ser determinadas pelas equações de equilíbrio. Bora lá?!

## 2.3 – Cargas axiais

Começaremos este tópico de nossa aula estudando o **princípio de Saint-Venant**. Vimos na seção passada desta aula que, quando um material se comporta de maneira linear em sua fase elástica, a lei de Hooke pode ser aplicada e existirá uma relação proporcional entre tensão e deformação.

Quando uma barra está **carregada axialmente** em uma extremidade e presa a um apoio na outra, ela se **deforma elasticamente** ao longo do eixo de seu centroide, contudo a **deformação localizada** em um ponto mais **distante** de onde a carga está sendo aplicada é praticamente **desprezível**, enquanto na região próxima da carga a deformação é maior.





A distância mínima entre a extremidade da barra onde ocorre a deformação é, em regra, dada por no mínimo igual à maior dimensão da seção transversal carregada. A partir desta análise o cientista Francês Barré Saint-Venant afirmou que a tensão e a deformação produzidas em pontos de um corpo distantes suficientemente da região de onde a carga está sendo aplicada, serão iguais à tensão e à deformação ocasionadas por quaisquer carregamentos aplicados com a mesma resultante estaticamente equivalente e que estão sendo aplicados ao corpo dentro da mesma região.

A partir do **princípio de Saint-Venant**, podemos determinar matematicamente a **deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais** quando o material for homogêneo com módulo de elasticidade (E), área (A) e carga (P) constantes, como:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

Caso haja **mudança repentina** na área da seção transversal de uma barra ou de seu módulo de elasticidade, podemos calcular o deslocamento entre as extremidades da barra como o **somatório das deformações de cada segmento**. Vejamos:

$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

Como convenção de sinais, quando o carregamento for de **tração**, consideraremos este como **positivo**. Quando for de **compressão**, será considerado **negativo**. Assim, se o resultado calculado for positivo, teremos um alongamento da barra, se for negativo, teremos a contração desta.

Caso na hora de sua prova você não se lembre desta equação, você pode chegar até ela a partir da **manipulação algébrica de equações conhecidas**, como a lei de Hooke, a de tensão normal e a de deformação de engenharia. Vejamos:

$$\sigma = E \cdot \epsilon; \quad \sigma = \frac{P}{A}; \quad \epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{P \cdot L_0}{A \cdot E}$$

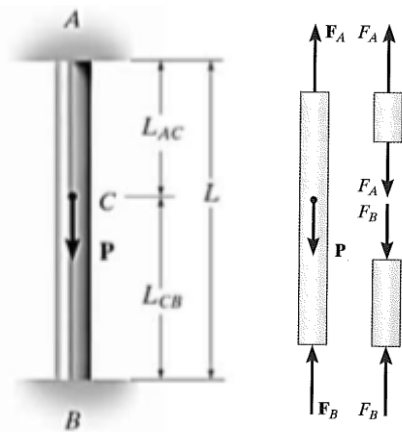
Conhecido o princípio de Saint-Venant, vamos ao estudo do princípio da superposição.

O **princípio da superposição** é usado quando é preciso determinar tensão ou deformação em pontos de um **corpo com múltiplos carregamentos ou um carregamento multiaxial**, simplificada e complicada para uma simples análise de equilíbrio.

Esse princípio baseia-se na **determinação separadamente** dos efeitos dos vários carregamentos e no final combina-se os resultados obtidos para se obter os efeitos provocados pelos carregamentos a qual o corpo está sujeito. **Dois condições** são necessárias para a aplicação desse princípio:

- A **carga deve estar relacionada linearmente com a tensão ou o deslocamento** a ser determinado.
- O **carregamento não pode provocar mudanças significativas na configuração original** do elemento ou em sua geometria.





Vamos exemplificar o princípio da superposição com um exemplo em que um elemento estaticamente indeterminado carregado com uma carga axial. Nesse caso, a barra está presa em ambas as extremidades se tornando indeterminada, pois não é possível a determinação de suas reações através dos princípios de equilíbrio. Vejamos o DCL, ao lado, e a análise de equilíbrio:

$$+\uparrow \sum F = 0; \Rightarrow F_B + F_A - P = 0$$

Como não é possível determinar as reações apenas com a equação acima estabelecemos uma **equação adicional** considerando a deformação. Esta nova equação é denominada **condição de compatibilidade ou condição cinemática**.

Neste caso um deslocamento entre uma extremidade da barra seria igual ao da outra que seria igual a zero devido a fixação em ambos os apoios da barra. Assim obtemos:

$$\delta_{A/B} = 0 \Rightarrow \frac{F_A \cdot L_{AC}}{A \cdot E} - \frac{F_B \cdot L_{CB}}{A \cdot E} = 0$$

Assim possuímos **duas equações para duas incógnitas** ( $F_A$  e  $F_B$ ). Substituindo uma na outra chegamos as seguintes expressões:

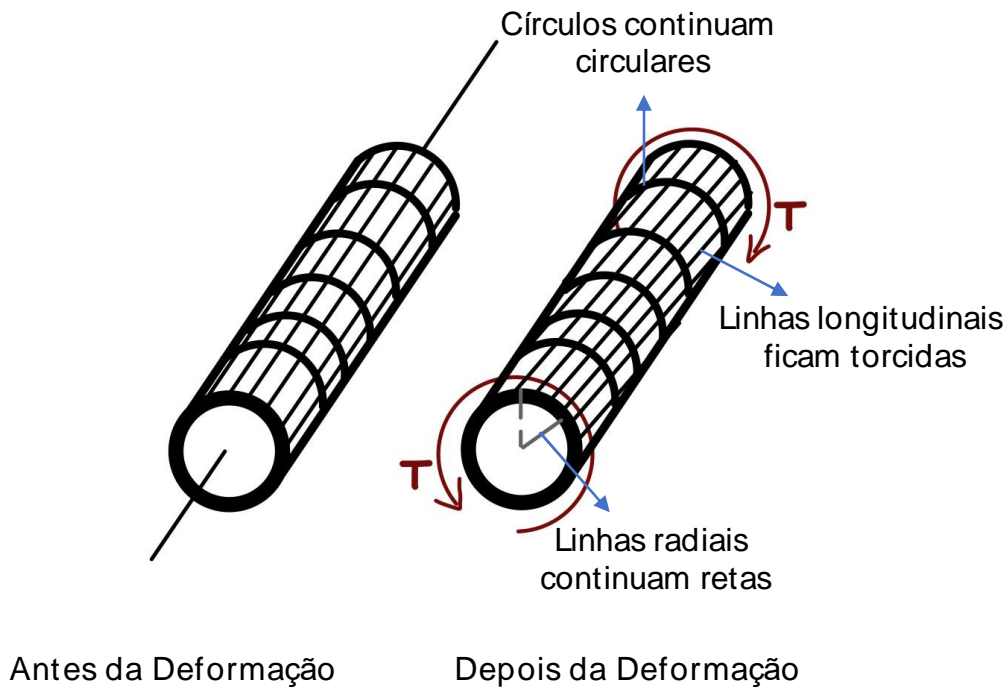
$$F_A = P \left( \frac{L_{CB}}{L} \right) \text{ e } F_B = P \left( \frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Caro estrategista, a partir dessa análise, nota-se que as reações em uma **barra estaticamente indeterminada** podem ser encontradas pelos **princípios de equilíbrio e por condições de compatibilidade** que apresentem o deslocamento nos apoios. Com isso encerramos esta seção de nossa aula e vamos ao estudo da torção.

## 2.4 – Torção

Neste tópico de nossa aula, vamos estudar tensões e deformações sofridas por peças com seção transversal circular, submetidas a torção. Esses efeitos são chamados de **momento torçor ou de torção ou torque (T)**. A figura abaixo exemplifica um eixo longitudinal sem e com deformação ocasionada pela sua torção.





A **tensão de cisalhamento** será maior quanto mais distante for do ponto analisado do centro da seção transversal e será menor quanto maior for o momento polar de inércia dessa seção. Matematicamente podemos expressar a tensão de cisalhamento máxima,  $\tau_{máx}$ , no eixo em sua superfície externa como:

$$\tau_{máx} = \frac{T \cdot c}{J}$$

Em que T é o **torque interno** resultante agindo na seção transversal, que pode ser calculado pelo método das seções combinado com a aplicação das equações de equilíbrio de momento aplicada a linha centroidal do eixo, J é o momento polar de inércia da área e c é o raio externo do eixo analisado.

Quando analisamos um eixo maciço o **momento polar de inércia** é determinado pela seguinte expressão:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

Para casos em que o eixo for tubular o momento de polar de inércia da seção transversal será determinado pela diferença entre o raio externo e o raio interno. Vejamos:

$$J = \frac{\pi}{2} (c_{ext}^4 - c_{int}^4)$$

Essas **equações de torção** são baseadas em situações em que o torque resultante na seção transversal do eixo seja igual ao torque produzido pela distribuição linear da tensão de cisalhamento em torno da linha central longitudinal do eixo. Portanto, o **eixo ou tubo necessita apresentar seção transversal circular e ser composto por um material homogêneo.**



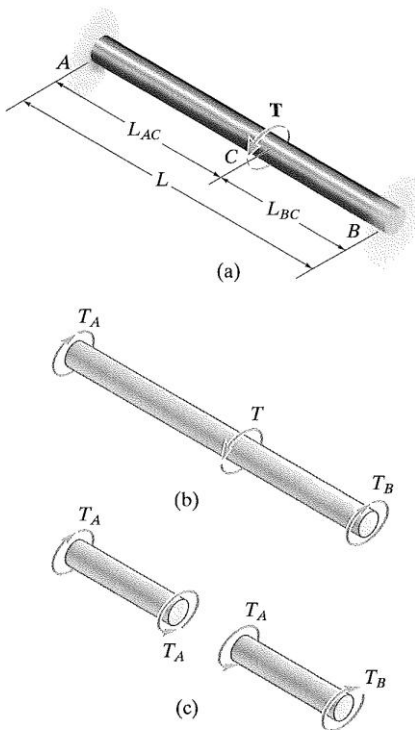
Outro fator importante em projetos de eixos é o **ângulo de torção** ao qual esse pode ser submetido ao ser submetido a um torque. Quando se admite o torque e a área da seção transversal como constantes e que também o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material (G) seja constante, chegamos à seguinte expressão algébrica para o ângulo de torção ( $\phi$ ):

$$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

Em que L é o comprimento do eixo e  $\phi$  é expresso em radianos.

Analogamente ao estudado com as cargas axiais, quando possuímos um **eixo estaticamente indeterminado carregado com torque**, fixados em suas duas extremidades, podemos realizar a resolução do problema através da **combinação do princípio de equilíbrio com a análise do ângulo de torção sofrido pela barra quando dividimos essa em duas partes**. Assim o ângulo de torção em uma extremidade do eixo em relação a outra será igual a zero, uma vez que os apoios são fixos.

Vejamos a figura e as equações que expressam as reações nos pontos A e B.



$$\phi_{A/B} = 0$$

$$\frac{T_A L_{AC}}{J \cdot G} - \frac{T_B L_{BC}}{J \cdot G} = 0$$

$$T_A = T \left( \frac{L_{BC}}{L} \right)$$

$$T_B = T \left( \frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Nesses casos os torques de reação aumentam ou diminuem linearmente de acordo com a localização ao qual o torque T está sendo aplicado.

R.C. Hibbeler – Resistência dos Materiais. 7ª Ed.

Para encerrarmos o tema, devemos saber que em alguns casos podemos ter a necessidade de **converter a potência gerada** em um eixo rotativo em torque. Para isso a seguinte fórmula pode ser utilizada:

$$P = T \cdot \omega$$



Em que  $\omega$  é a velocidade angular do eixo expressa geralmente em rad/s. Caso seja informado a frequência de rotação de um eixo a seguinte expressão pode ser utilizada também:

$$P = 2\pi f \cdot T$$

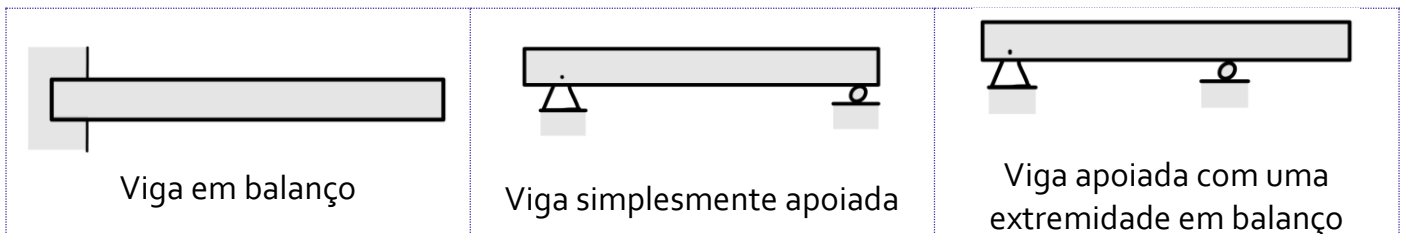
Assim, encerramos o estudo da torção e passamos agora ao estudo da flexão. Vamos lá?!

## 2.5 – Flexão

Caro aluno(a), nesta seção, vamos estudar a **flexão**. Iniciaremos com uma abordagem da construção dos **diagramas de força cortante e momento fletor** para uma viga ou eixo, pois para determinarmos a tensão de flexão devemos determinar o momento interno de uma seção.

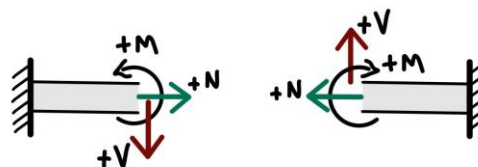
Como você deve lembrar, na seção 1.7 de nossa aula, em estática, já abordamos previamente como se é feito o cálculo dos esforços internos em vigas. Vamos revisar brevemente o tema e passaremos a exemplificação de como se é elaborado o diagrama de força cortante e momento fletor, em estruturas homogêneas de acordo com o tipo de carregamento.

As **vigas** são **elementos longos e retos** e são fabricadas para **suportar cargas perpendiculares** ao seu eixo longitudinal. **Classificamos as vigas** de acordo com o formato **que estas são apoiadas**, sendo elas simplesmente apoiadas, em balanço ou apoiadas com uma extremidade em balanço. Vejamos a figura abaixo.



Quando se é projetada uma viga, devemos conhecer os **pontos**, ao longo de seu eixo, em que a **variação do cisalhamento e do momento fletor são máximos**. Com isso, e com a adoção de uma correta convenção de sinal para cisalhamento e momento positivos, é possível encontrar seus valores em função da posição ao longo do eixo  $x$  da viga e, assim, podemos representá-los graficamente nos chamados diagramas de momento fletor e força cortante.

Vejamos uma imagem com a **convenção de sinal que adotada** para a determinação da força de cisalhamento e momento fletor de acordo com o lado do "corte" realizado na viga.



Na figura acima, temos uma viga com engaste a esquerda e outra com engaste a direita.

Para a construção dos diagramas de força cortante e momento fletor, devemos adotar o seguinte procedimento:

- 1 - Determinar as reações nos apoios através da decomposição de todas as forças em componentes perpendiculares e paralelas ao eixo da viga.
- 2 - Seccionar a viga perpendicularmente ao seu eixo a uma distância  $x$  da origem, entre cada variação de carregamento e construir o DCL para cada seção.
- 3 - A partir do princípio do equilíbrio, determinar as forças de cisalhamento em cada seção através do somatório de forças perpendiculares ao eixo da viga e também, determinar o momento fletor em cada parte da viga através do somatório de momentos em torno da extremidade seccionada.
- 4 - Construir o diagrama de força cortante e momento fletor em função da distância  $x$  da origem da barra. Quando os valores numéricos forem positivos os valores de  $V$  e  $M$  serão marcados acima do eixo  $x$ , quando negativos abaixo.

Quando uma viga está sujeita a vários carregamentos, determinar o diagrama de momento fletor e força cortante pode ser complicado. Para **facilitar** existe um **método baseado em duas relações diferenciais** que existem entre carga distribuída, cisalhamento e momento. Essas relações são:

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

*inclinação do diag. de força cortante em cada ponto = -intensidade da carga distribuída em cada ponto*

$$\frac{dM}{dx} = V$$

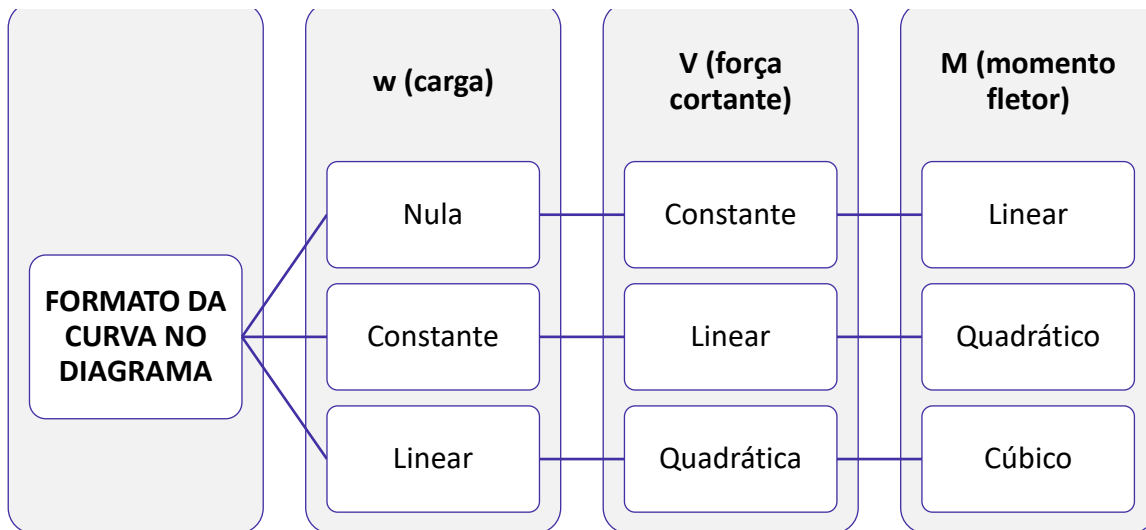
*inclinação do diag. de momento em cada ponto = cisalhamento (força cortante em cada ponto)*

Através dessas equações, é possível obter convenientemente os diagramas de força cortante e momento fletor, pois através das regras de derivadas e integrais sabemos que integrando  $w$  obtemos  $V$  e integrando  $V$  encontramos  $M$ . Quando temos um **carregamento em uma viga**, sabemos que ele pode ser **nulo, constante ou linear** isso resultará em uma força de cisalhamento constante, linear ou quadrática e em um momento fletor linear, quadrático ou cúbico respectivamente.

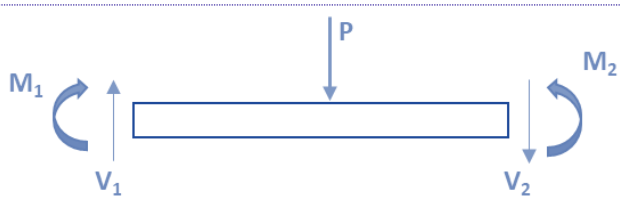
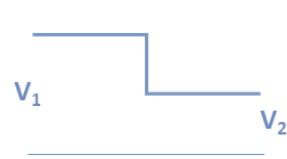
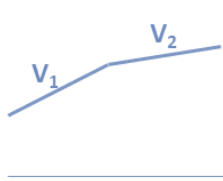
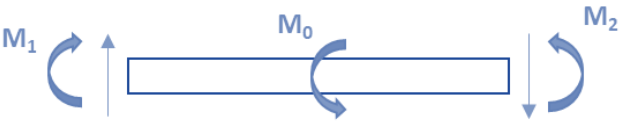


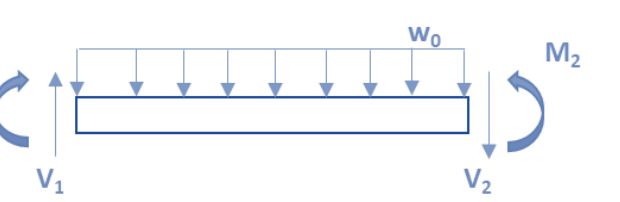
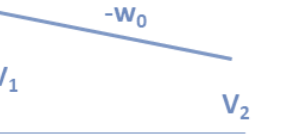
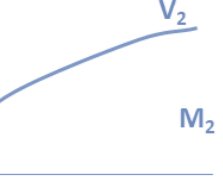
Quando tivermos uma **carga igual a zero**, o diagrama de **força cortante** terá um comportamento **constante** e o diagrama de **momento fletor** terá um comportamento **linear**. Para um **carregamento constante** o comportamento da curva da **força cortante será linear e do momento fletor será quadrático**. Por fim, para um **carregamento linear** o diagrama de **força cortante será quadrático e o de momento fletor será cúbico**.

Vejamos como ficaria o comportamento do diagrama de força cortante e momento fletor de acordo com o tipo de carregamento.



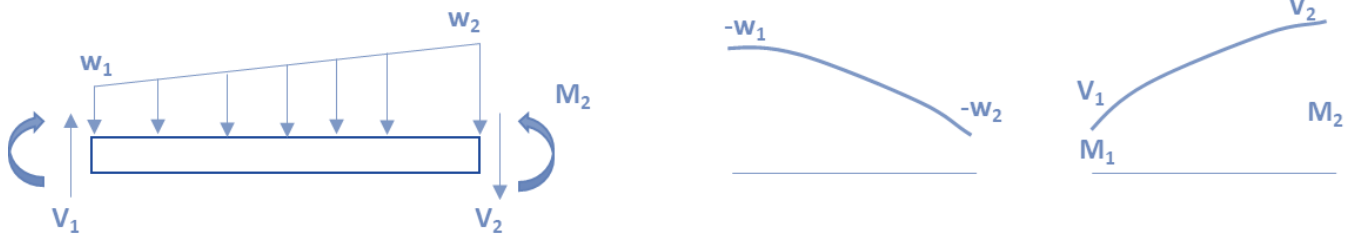


A tabela abaixo apresenta os principais formatos de diagramas de força cortante e momento fletor de acordo com os tipos de carregamento.

CARREGAMENTO	DIAGRAMA DE FORÇA CORTANTE	DIAGRAMA DE MOMENTO
		
<p>A força <math>P</math> para baixo faz a força cortante <math>V</math> saltar de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>. No diagrama de momento a inclinação constante muda de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>		
		
<p>Não há variação na força cortante. Inclinação positiva constante e como o momento aplicado é anti-horário o momento fletor salta para baixo.</p>		
		
<p>Inclinação negativa constante no diagrama de <math>V</math> e inclinação positiva para o momento fletor.</p>		







Inclinação negativa para a força cortante e inclinação positiva para o momento fletor.



Difícilmente em provas objetivas será necessário a construção de diagramas de força cortante e momento fletor, contudo a banca pode elaborar **questões** onde é dado um **tipo de carregamento** e pede para assinalar o correto **diagrama de momento fletor e força cortante**.

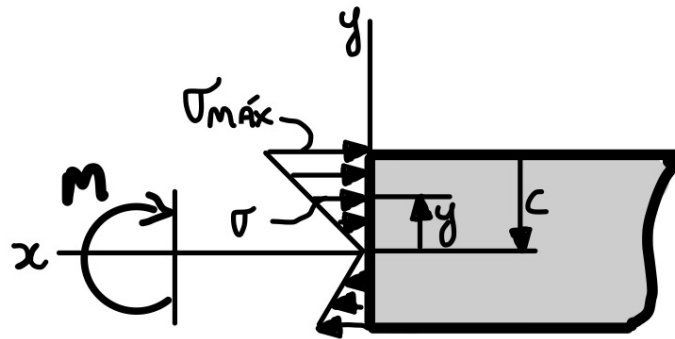
Conhecidos os principais diagramas de força cortante e momento fletor e como se dá o comportamento da curva em relação ao tipo de carregamento, vamos ao estudo da **fórmula de flexão**. Esta equação é uma **relação entre a distribuição de tensão longitudinal em uma viga e o momento fletor interno resultante que está agindo na seção transversal da viga**.

Partindo do pressuposto de que o material de determinado material se comporta de maneira elástica, podemos encontrar a **tensão normal máxima no elemento**. Esta ocorre no ponto na área da seção transversal mais afastado da linha neutra da viga. Matematicamente esta tensão é dada por:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot c}{I}$$

Em que  $M$  = o momento interno resultante, calculado pela análise dos efeitos internos;  $I$  = o momento de inércia da área da seção transversal em torno da linha neutra; e  $c$  = a distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado deste onde agirá a tensão máxima  $\sigma_{m\acute{a}x}$ . Vejamos a figura abaixo.





Analogamente para se determinar a tensão normal a uma distância intermediária ( $\gamma$ ), podemos calcular está a partir da seguinte equação:

$$\sigma = -\frac{M \cdot \gamma}{I}$$

Cabe destacar que, nesse caso,  $\gamma$  é a **distância medida perpendicularmente entre o eixo neutro até o ponto onde a tensão normal deve ser determinada** e o sinal é negativo devido à convenção de sinais e esta ser uma tensão de compressão.

Com isso, encerramos o estudo da flexão.

## 2.6 – Vasos de pressão

Caro estrategista, neste tópico da nossa aula, vamos abordar a análise de tensão em **vasos de pressão de paredes finas**.

Atualmente, **vasos de pressão cilíndricos ou esféricos** são amplamente utilizados na indústria como em caldeiras, tanques de ar comprimido, cilindros secadores de papel entre outros. Esses equipamentos quando em operação são submetidos a cargas internas em todas as direções. Fique tranquilo, pois apesar de parecer complicado podemos analisar vasos de pressão de uma maneira descomplicada desde que este possua uma **espessura de parede que satisfaça a relação:**

$$\frac{r}{t} \geq 10$$

Onde  $r$  é o raio interno e  $t$  é a espessura da parede do vaso.



Aqui, cabe destacar, que exatamente quando a relação  $r/t$  for igual a 10 o resultado para a análise de tensão apresentará um valor em torno de **4% menor que a tensão máxima real do vaso**.



Partindo do pressuposto de que a parede do vaso é fina, a variação de tensão por sua espessura não é significativa, assim podemos adotar está como sendo constante. Assim, para **vasos cilíndricos**, podemos determinar a **tensão normal circunferencial (tangencial) uniforme** que está agindo em toda a parede do vaso pela seguinte expressão:

$$\sigma_{circ} = \frac{P \cdot r}{t}$$

Em que P é a tensão manométrica no interior do vaso.

Para se calcular a **tensão normal longitudinal** em um vaso de pressão cilíndrico, a seguinte equação é utilizada:

$$\sigma_{long} = \frac{P \cdot r}{2 \cdot t}$$

Nota-se que a **tensão circunferencial** é **duas vezes maior do que a tensão longitudinal ou axial**.

Em se tratando de **vasos de pressão esféricos** a **tensão normal** atuante pode ser calculada pela seguinte expressão matemática:

$$\sigma = \frac{P \cdot r}{2 \cdot t}$$



A **tensão normal em vasos de pressão esféricos** é **igual a tensão normal longitudinal em vasos de pressão cilíndrico**. Portanto decore as tensões em vasos de pressão cilíndrico e lembre-se da semelhança quando se tratar de um vaso esférico.

Assim, encerramos o tópico a respeito de vasos de pressão cilíndricos e esféricos. Passaremos agora para o estudo de um dos tópicos mais importantes desta aula, que são as transformações de tensões e deformações. Vamos lá?!

## 2.7 – Transformações de tensões e deformações

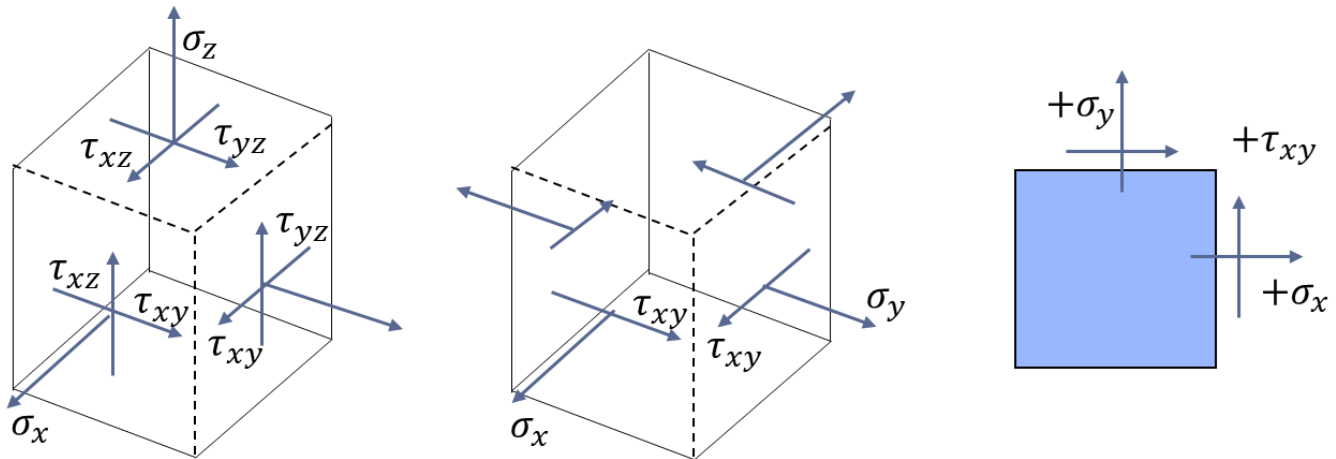
Nesta parte de nossa aula, estudaremos como é realizada a **transformação de tensões** associadas a um determinado sistema de coordenadas em suas respectivas componentes **em um sistema de coordenadas com diferente orientação**. Isto pode ser realizado através de equações pré-definidas e assim podemos obter a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal máxima em ponto definido e assim determinar a orientação sobre a qual estas estão agindo.

Ao se analisar as tensões em um elemento cúbico de um corpo, existem seis componentes independentes de tensão normal e de cisalhamento atuando nas faces deste corpo. Devido à



complexidade para análise nesse elemento tridimensional, comumente realizamos simplificações das cargas envolvidas e adotamos uma **análise em um único plano**. Assim o material estará sujeito a **tensões no plano**.

Representamos o estado geral de tensão no plano em um ponto com duas componentes de tensão normal com orientação x e y e um tensão de cisalhamento. Vejamos a figura abaixo exemplificando o estado geral de tensão, o estado plano de tensão em 3D e em 2D.



Visto isso, podemos afirmar que **se um estado de tensão em um ponto for conhecido**, de acordo com uma orientação determinada de um elemento do material, **podemos então determinar o estado de tensão para uma orientação diferente** através das seguintes equações:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \text{sen } 2\theta$$

Para  $\sigma_{y'}$  adotamos  $\theta = \theta + 90$  e assim a expressão para  $\sigma_{y'}$  será:

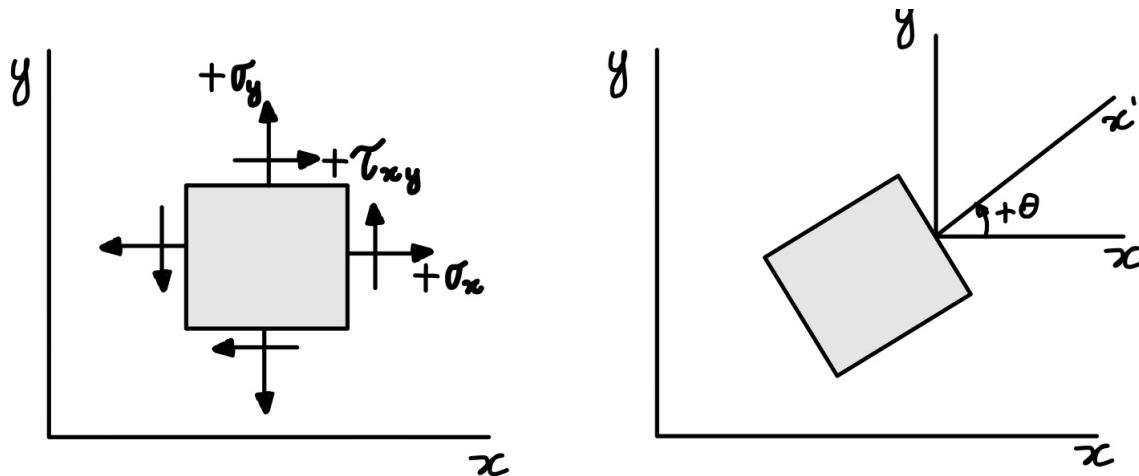
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \text{sen } 2\theta$$

Note que a diferença entre as equações de  $\sigma_{x'}$  e  $\sigma_{y'}$  está na diferença do sinal em relação a  $\sigma_{x'}$ . Se ao calcular  $\sigma_{y'}$  obtivermos um sinal negativo este indicará que a tensão age no sentido de  $y'$  positivo. Vejamos agora a equação para a **tensão de cisalhamento**.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \cdot \text{cos } 2\theta$$

Para utilizarmos as equações acima, adota-se como **convenção de sinal** positivo o demonstrado na figura abaixo.





Caro aluno(a), em algumas questões de concursos, você pode ser instado a calcular as **tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano**. Como pudemos notar anteriormente, os valores dessas tensões dependem do ângulo  $\theta$ . Logo, devemos determinar o **ângulo da orientação** para qual as tensões principais e de cisalhamento, no plano, sejam máximas e mínimas. Para isso podemos utilizar a seguinte expressão matemática:

$$tg 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

Com a determinação do ângulo, a manipulação algébrica das equações chega-se à equação para se encontrar a **tensão normal máxima ( $\sigma_1$ ) ou tensão normal mínima  $\sigma_2$**  no plano que age sobre um ponto, onde  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Vejamos a expressão para o cálculo dessas tensões.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

De acordo com o **sinal escolhido para na resolução da raiz** quadrada, obtém-se a **tensão principal normal máxima ou mínima**, que agem nos chamados planos principais, onde **nenhuma tensão de cisalhamento age**, ou seja, nesses planos  $\tau_{xy} = 0$ .

Para a determinação da tensão de cisalhamento máxima no plano, a seguinte expressão para a determinação do ângulo de orientação do plano a qual isso ocorre é utilizada:

$$tg 2\theta_p = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

A **tensão de cisalhamento** máxima em um elemento é localizada no plano **orientado a 45°** em relação a posição ao plano do elemento que define a tensão principal.

Assim a tensão de cisalhamento máxima no plano é determinada por:



$$\tau_{\text{máx no plano}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Por fim, a tensão normal média é dada por:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Conhecidas as equações para transformação de tensão no plano, vamos ao estudo de uma **solução gráfica** denominada **círculo de Mohr**, muito exigida em provas de concursos, que possui relativamente simplicidade para sua memorização.

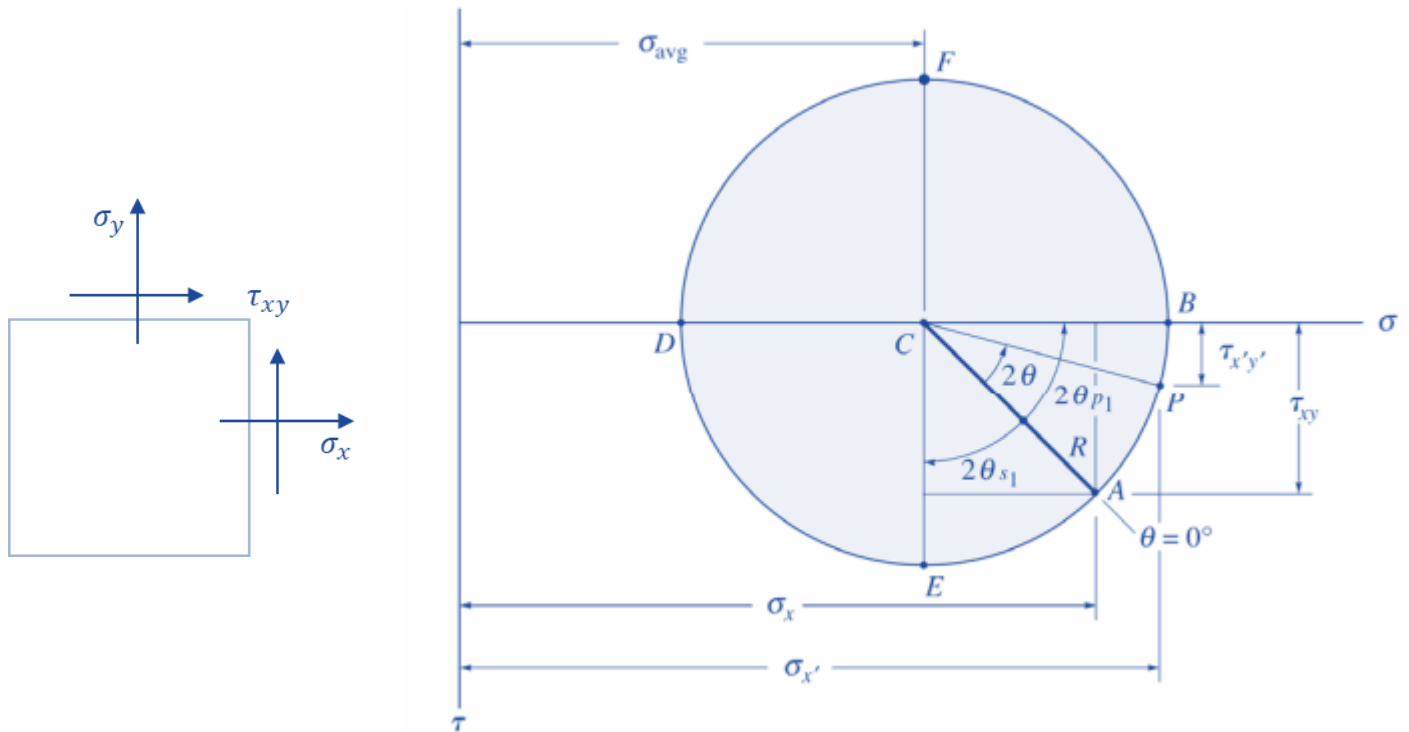
Para utilizarmos o círculo de Mohr, precisamos que cada plano seja representado, em um sistema de coordenadas com  **$\sigma$  no eixo das abscissas e  $\tau$  no eixo das ordenadas**. Como dito anteriormente, nos planos das tensões principais a tensão de cisalhamento é zero, logo esses planos são representados por pontos no eixo  $\sigma$ .

Cabe destacar que, com a representação gráfica do círculo de Mohr, podemos obter as seguintes observações:

- Em relação as **tensões de cisalhamento, máxima e mínima**, devemos lembrar que nos planos que essas ocorrem, a tensão normal é igual e que também estas são iguais, mas com sinais opostos. Além disso devemos saber que estas são representadas por pontos simétricos ao eixo das abscissas ( $\sigma$ ).
- A **tensão normal**, é dada pela **média aritmética das tensões principais** quando esta atua nos planos onde se encontram as tensões de cisalhamento máximas e mínimas.
- A representação de **planos perpendiculares** é feita por pontos com distância igual em relação ao eixo das abscissas, porém em lados opostos. Evidenciando que a tensão normal média dos dois planos é a mesma que a tensão média das tensões principais.

Vejamos a representação do círculo de Mohr, considerando um elemento no plano XY com tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  e tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$ .





Note que:

O **centro do círculo** está situado **no eixo  $\sigma$**  e que a tanto a tensão principal (normal) máxima quanto a tensão principal mínima, estão localizadas nos pontos direito e esquerdo de intersecção do círculo e do eixo  $\sigma$ , respectivamente.

As **tensões de cisalhamento máxima e mínima** se localizam nas tangentes superior e inferior do círculo.

O **centro do círculo** de Mohr está localizado na **média entre as tensões normais** que atuam nesse plano.

O **raio do círculo** de Mohr, que pode ser obtido por relações trigonométricas, é **igual a tensão de cisalhamento máxima e mínima**.

A **tensão principal máxima**  $\sigma_1$  pode ser determinada pela **soma entre o raio e a tensão normal média** dos planos, enquanto a tensão principal mínima é determinada pela diferença entre o raio e a tensão normal média dos planos perpendiculares entre si.

Para finalizarmos o estudo das transformações de tensões no plano, vimos como podemos determinar as tensões principais e de cisalhamento no plano e todas as demais grandezas envolvidas através do círculo de Mohr. É de suma importância que **você**, caro estrategista, **saiba analisar todas as grandezas envolvidas no círculo de Mohr**, pois este é um tema recorrente nos concursos de engenharia.

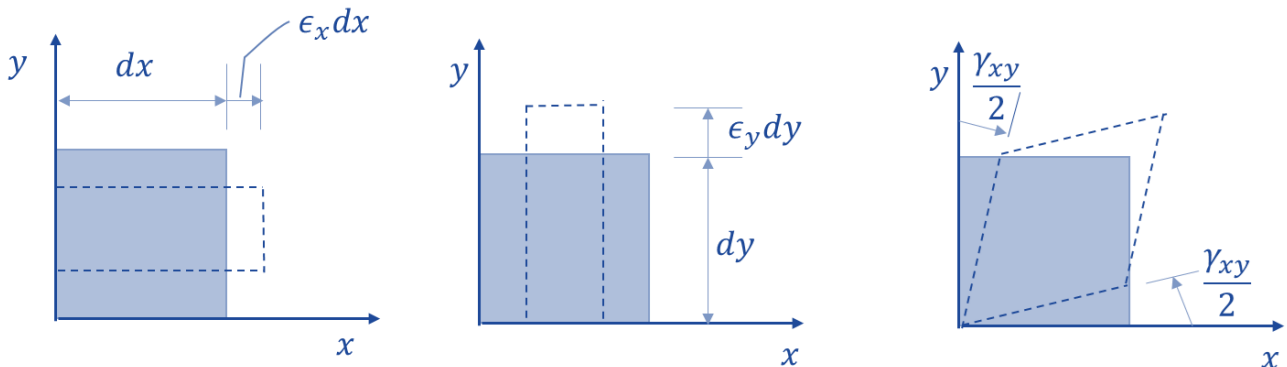
Analogamente, a transformação de tensão no plano existe também a **transformação de deformação**, em que também podemos aplicar a representação gráfica através do círculo de Mohr. Vamos ao estudo desse assunto.



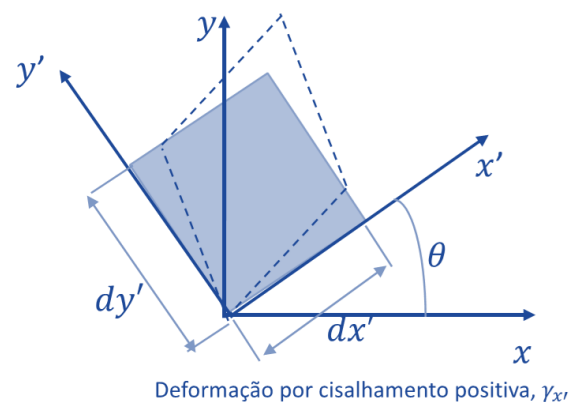
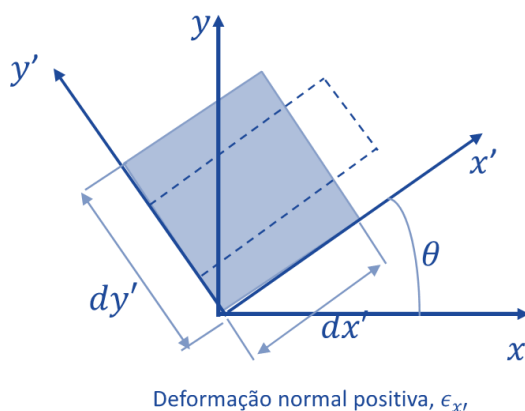


A deformação em um ponto é representada por três componentes de deformação normal ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ) e três componentes de deformação de cisalhamento ( $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ). Da mesma forma que a tensão no plano, as **componentes de deformação variam de acordo com a orientação do elemento**. A caráter de prova, de acordo com as exigências em concurso, iremos abordar a deformação plana considerando as componentes ( $\epsilon_x, \epsilon_y$ ) e uma componente de deformação de cisalhamento ( $\gamma_{xy}$ ).

**Deformações normais** são oriundas de **variações do comprimento** do elemento nas direções x e y. **Deformações de cisalhamento** são resultantes da **rotação relativa** de dois lados adjacentes do elemento. Vejamos a figura abaixo.



Como **convenção de sinal** adota-se a seguinte:



Visto isso, analogamente a tensão no plano, podemos afirmar que se um **estado de deformação em um ponto for conhecido**, de acordo com uma orientação determinada de um elemento do material, **podemos determinar** o estado de deformação **para uma orientação diferente** através das seguintes equações:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{sen } 2\theta$$

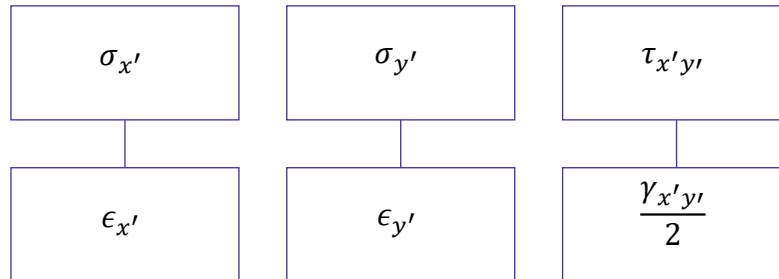
$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{sen } 2\theta$$

Para se determinar a **deformação de cisalhamento** de um elemento orientado a um ângulo  $\theta$  a seguinte equação é utilizada



$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\theta$$

Para facilitar a memorização note a **similaridade** entre as equações de transformação de tensão e deformação no plano.



Devido à similaridade entre as tensões e deformações no plano, podemos determinar a **direção do eixo e as deformações principais** ( $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ ) pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{(\epsilon_x - \epsilon_y)}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Da mesma forma que para as tensões no plano, a **deformação por cisalhamento máxima** no plano e a **deformação média** é dada por:

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{(\epsilon_x - \epsilon_y)}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

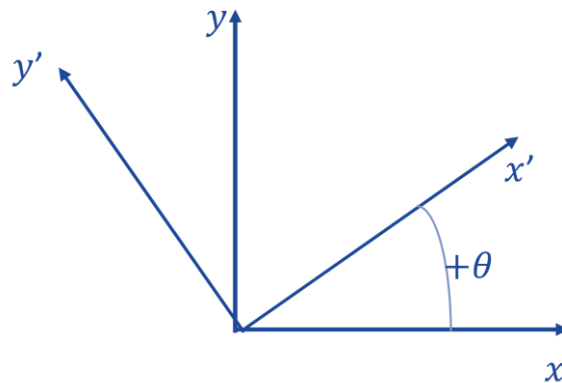
Devemos saber que devido ao **efeito de Poisson**, o **estado plano de deformação não se caracteriza como um estado plano de tensão e vice-versa**. Outro detalhe importante a se ressaltar é que quando se representa um estado de deformação por suas componentes principais, não haverá nenhuma deformação por cisalhamento agindo sobre esse elemento.

Para finalizarmos o aprendizado sobre a deformação no plano, podemos também representar esquematicamente a **deformação plana no círculo de Mohr**. Assim o procedimento para se desenhar o círculo de Mohr para a deformação é o mesmo do utilizado para tensão. Sendo o passo a passo o seguinte:

1- Definir o eixo das coordenadas em que o eixo das abscissas seja a deformação normal  $\epsilon$ , para direita positiva, e a ordenada represente metade da deformação por cisalhamento  $\frac{\gamma}{2}$ .



2- Adotar a convenção de sinal positivo conforme figura abaixo.



3- Marcar o ponto de referência com as coordenadas  $(\epsilon_x \text{ e } \gamma_{xy}/2)$ .

4- Ligar o ponto A ao ponto central do círculo, podendo assim determinar o raio deste através de relações trigonométricas.

5- Trace o Círculo com o raio encontrado.



### Círculo de Mohr p/ deformação

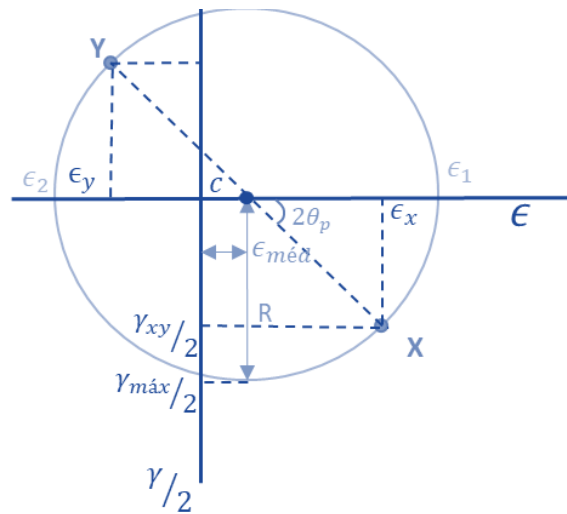
Definir eixos das coordenadas

Convenção de sinal

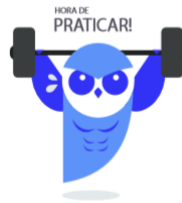
Marcar ponto de referência

Ligar ponto ao centro (raio)





Conhecidos os princípios de tensões e deformações multiaxiais e o círculo de Mohr, vamos abordar, diretamente, algumas **teorias de falhas**.



(CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) O estado plano de tensões atuante em um ponto da superfície de um eixo sob torção pura é tal que as tensões principais atuantes nesse ponto são de valores

- A) idênticos e de sinais iguais
- B) idênticos e de sinais contrários
- C) distintos e de sinais iguais
- D) distintos e de sinais contrários
- E) distintos e de sinais dependentes dos valores

**Comentário:**

No caso de um eixo sob torção pura, temos apenas tensões de cisalhamento atuando. Por isso:

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} \neq 0$$

Calculando agora as tensões principais.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Substituindo

$$\sigma_{1,2} = \frac{0 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 + 0}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

valores.



$$\sigma_1 = +\tau_{xy}$$

$$\sigma_2 = -\tau_{xy}$$

Como podem ver, as tensões são idênticas porém com os sinais invertidos. Sendo assim, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

### 2.7.1 – Teoria de falhas

Geralmente quando um **material for dúctil** sua falha será na **tensão de escoamento** e quando este for **frágil** está ocorrerá em seu **limite de ruptura**. Assim as quatro teorias de falhas são utilizadas para prever a falha de um material submetido a um estado de tensão multiaxial.

Algumas destas teorias podem ser exigidas em provas em questões teóricas. Vamos as suas definições.

**Teoria da tensão de cisalhamento máxima ou critério de Tresca:** utilizada para prever qual será a tensão de falha quando um **material dúctil** é sujeito a qualquer tipo de falha. Esta teoria afirma que o escoamento do material inicia quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta no material alcança a tensão de cisalhamento que irá provocar o escoamento desse material sujeito a apenas tensão axial. Matematicamente para evitar a falha segundo o critério de Tresca, tem-se que:

$$\tau_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

Para estudo e aplicações precisamos escrever **a tensão de cisalhamento em função das tensões principais**. Caso **as duas tensões no plano possuam o mesmo sinal**, a falha ocorrerá fora dele e assim temos que:

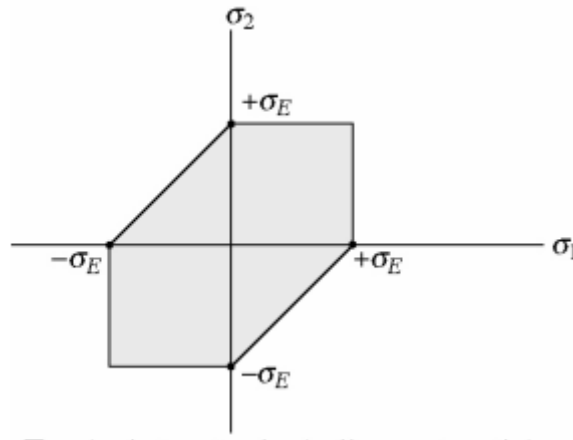
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{max}}{2}$$

Quando as duas tensões principais apresentarem sinais oposto, a falha ocorrerá no plano e temos que:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Graficamente, o critério de Tresca é representado por:

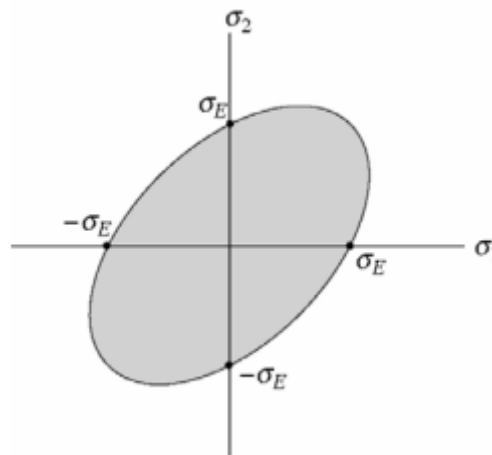




**Teoria da energia de distorção máxima ou critério de Von Mises/Hencky:** esta teoria afirma que o escoamento em **material dúctil** acontece quando a energia de distorção por unidade de volume do material for igual ou ultrapassar a energia de distorção por unidade de volume desse mesmo material quando sujeito a escoamento em um ensaio de tração. Este critério de falha é baseado nas distorções provocadas pela energia de deformação.

Matematicamente, e graficamente o critério de Von Mises/Hencky é representado por:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_e^2$$



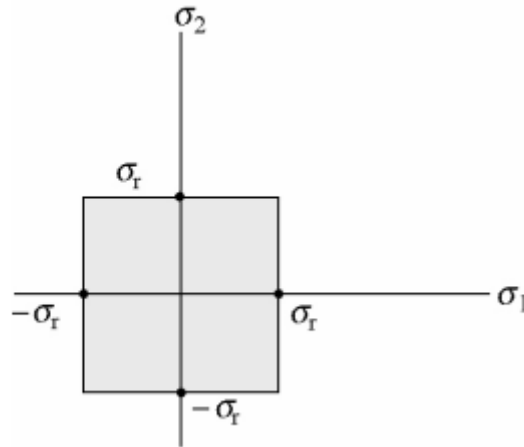
Quando um ponto do material estiver tracionado de maneira que a coordenada da tensão ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) esteja posicionada no limite ou fora da área sombreada, diz-se que o material falhou.

**Teoria da tensão normal máxima - Rankine:** essa teoria propõe que um **material frágil** irá falhar quando a sua tensão principal  $\sigma_1$  alcançar um valor limite igual ao limite de resistência à tensão normal que esse material consegue suportar em um ensaio de tração simples. Caso o material for submetido ao estado de tensão simples tem-se que:

$$|\sigma_1| = \sigma_r \text{ e } |\sigma_2| = \sigma_r$$

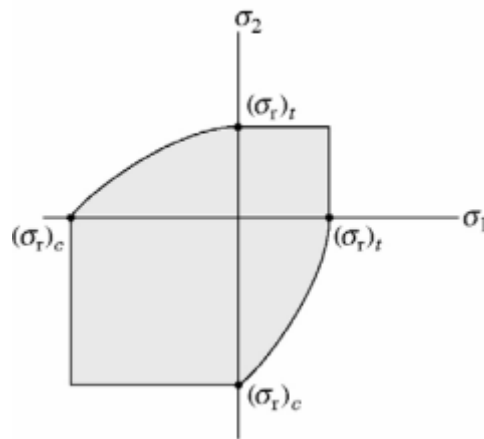
Graficamente representando:





Nota-se que se a coordenada da tensão principal ( $\sigma_1 \sigma_2$ ) em um ponto do material encontrar-se no limite ou fora da área sombreada, diz-se que o material sofrerá fratura. Essa teoria útil para materiais frágeis cujos diagramas tensão-deformação são iguais tanto sob tração quanto sobre compressão.

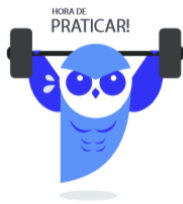
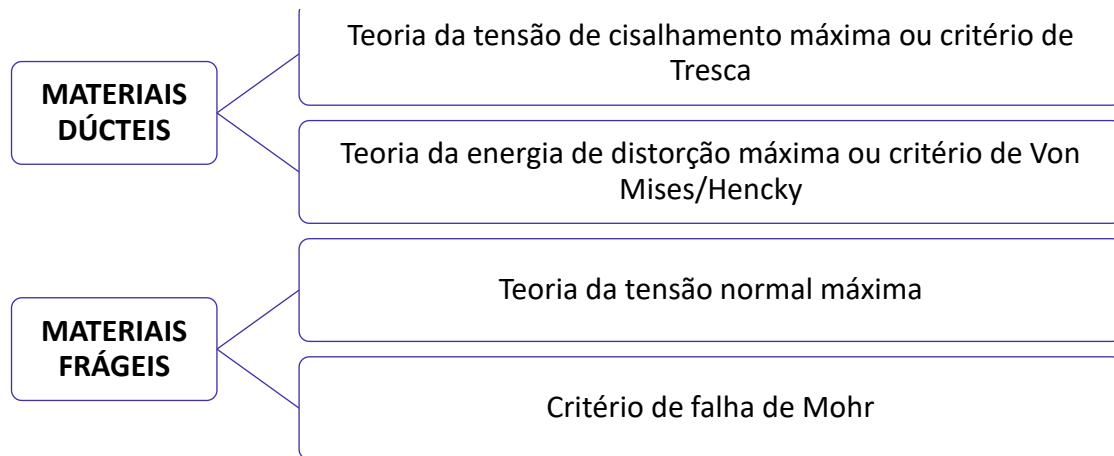
**Critério de falha de Mohr:** em alguns materiais frágeis há diferenças entre as propriedades mecânicas sob tração ou compressão. Assim o critério de falha de Mohr propõe um procedimento baseado em três ensaios, sendo um ensaio de tração, um de compressão e um de torção. Através dos dados o critério prevê a construção de um círculo de Mohr para saber se ocorrerá ou não a falha do material. Graficamente esse critério é representado por:



Cabe destacar que, devido a existirem imperfeições em materiais frágeis, é difícil de prever a ruptura sob tensão desse tipo de material, por isso **teorias de falhas para materiais frágeis** devem ser utilizadas com **cautela**.







(CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Um eixo de material dúctil submetido à torção pura deve ser dimensionado segundo a teoria da máxima tensão cisalhante ou a teoria da máxima energia de distorção.

Considerando-se que um ponto qualquer da superfície do eixo esteja sujeito a um estado plano de tensões, a teoria que resulta em um maior diâmetro para o eixo é a da

- A) máxima energia de distorção por ser mais conservativa.
- B) máxima energia de distorção por ser menos conservativa.
- C) máxima tensão cisalhante por ser mais conservativa.
- D) máxima tensão cisalhante por ser menos conservativa.
- E) máxima energia de distorção por considerar que a falha só ocorre após a ruptura.

#### Comentário:

Quando projetamos um eixo de material dúctil submetido à torção pura, devemos utilizar uma teoria de falha apropriada para materiais dúcteis. As duas mais comuns são:

Teoria da Máxima Tensão Cisalhante, também chamada de Teoria de Tresca, assume que a falha ocorre quando a tensão cisalhante máxima atinge o limite de escoamento em cisalhamento do material. Essa teoria é **mais conservativa**, pois considera que o material falha mais cedo sob tensões cisalhantes elevadas.

Teoria da Máxima Energia de Distorção, também chamada de Teoria de von Mises, assume que a falha ocorre quando a energia de distorção acumulada atinge um valor crítico. Essa teoria é menos conservativa do que a de Tresca, pois permite tensões um pouco mais altas antes da falha.

Mas enfim, qual dessas teorias resulta em um maior diâmetro para o eixo?

Como a teoria de Tresca exige um maior fator de segurança, ela resulta em maiores dimensões para o eixo, pois ele precisa resistir a tensões cisalhantes mais baixas para evitar falha.



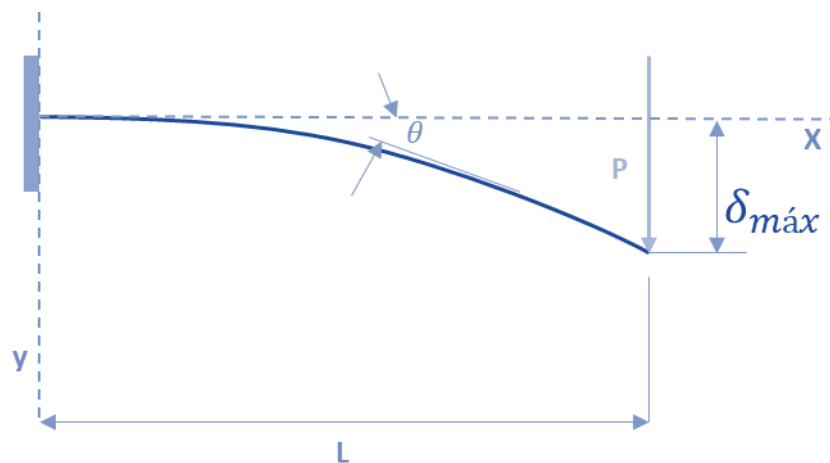
A alternativa C está CORRETA e é o gabarito da questão.

Encerramos aqui os estudos das transformações de tensões e deformações. Passamos agora ao estudo das deflexões em vigas.

## 2.8 – Deflexão

Em situações reais de engenharia sempre é necessário **limitar o grau de deflexão** de uma estrutura (viga ou eixo) pode sofrer. Nesta seção de nossa aula, abordaremos como pode ser determinada a **inclinação ou o deslocamento** em um ponto de uma viga ou eixo.

Geralmente o **deslocamento e a inclinação** que uma estrutura pode sofrer é **restringida pelos tipos de apoios** ao qual a viga ou eixo está sendo sustentada. Normalmente **pinos** restringem o **deslocamento** enquanto um **engaste** em parede restringe a **rotação e a inclinação** da viga. Vejamos um exemplo de deflexão em uma viga engastada.



A obtenção das **equações para deflexão** em vigas é realizada através da **integração de equações diferenciais** que descrevem a curva da linha elástica da viga. Quando abordamos vigas com pequenos ângulos de rotação, que são aquelas encontradas em edifícios, automóveis, aeronaves... a curva de deflexão é muito pequena e assim sua **curvatura (k)** pode ser dada por:

$$k = \frac{d\theta}{dx}$$

Derivando esta expressão em relação a x e considerando o material elástico e linear, seguindo a lei de Hooke, podemos obter a expressão diferencial para a **curva de deflexão básica** de uma viga, que é:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Onde M é o momento fletor; E é o módulo de elasticidade do material; e I é o momento de inércia da área da seção transversal da viga. E, I e v são funções de x.



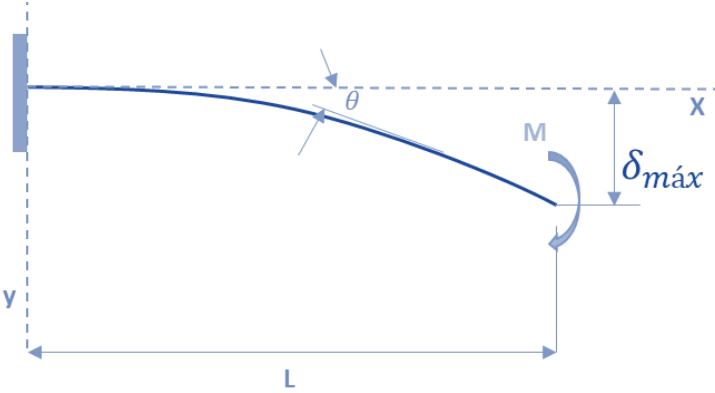
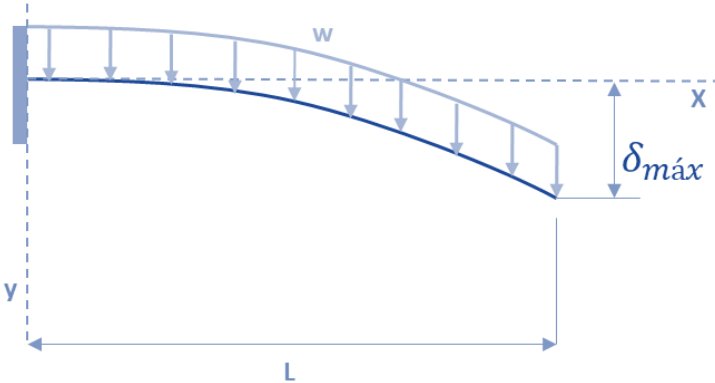
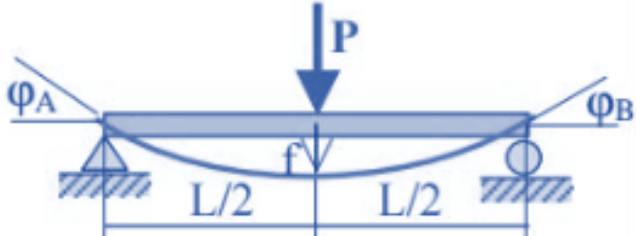
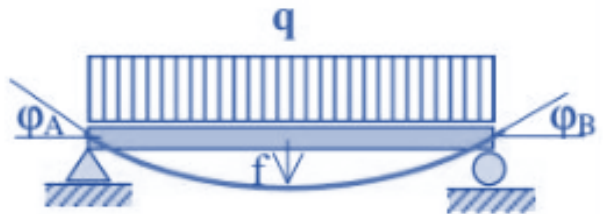
Ao se integrar duas vezes a equação acima obtemos na **primeira integração** o **ângulo de deflexão** e na **segunda a deflexão  $v$  ou  $\delta$** . Quando integramos obtemos constantes de integração que são obtidas através das condições relativas a inclinações e deflexões de acordo com os tipos de apoios da viga.

Caro aluno(a), no curso de engenharia é muito importante se saber como é feita a dedução de uma equação, contudo dificilmente em uma questão de concurso será exigido a dedução da equação de deflexão para um carregamento desconhecido ou fora do comum. Logo, trouxe para você uma tabela com as **principais equações de deflexão e deslocamento máximo** para os principais tipos de carregamentos.



TIPO DE CARREGAMENTO	INCLINAÇÃO DE DEFLEXÃO	DEFLEXÃO (DESLOCAMENTO) MÁXIMO
	$\theta = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$	$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$
	$\theta = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot I}$	$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{P \cdot a^2}{6 \cdot E \cdot I} (3L - a)$



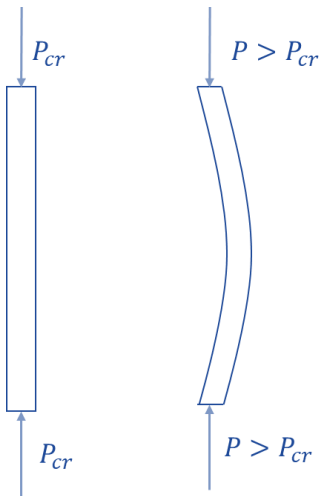
	$\theta = \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$	$\delta_{\max} = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$
	$\theta = \frac{w \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I}$	$\delta_{\max} = \frac{w \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$
	$\varphi_A = -\frac{P L^2}{16 E I}$ $\varphi_B = \frac{P L^2}{16 E I}$	$\delta_{\max} = -\frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$
	$\varphi_A = -\frac{q L^3}{24 E I}$ $\varphi_B = \frac{q L^3}{24 E I}$	$\delta_{\max} = -\frac{5 q L^4}{384 \cdot E \cdot I}$

Com o conhecimento das principais equações de deflexão de vigas e eixos encerramos este tópico. Agora passamos ao último tema de nossa aula, flambagem.

## 2.9 – Flambagem em colunas

Quando submetemos um elemento estrutural, denominado **coluna**, a cargas de **compressão** e este for **esbelto e comprido** pode ocorrer uma deflexão ou oscilação lateral nesta estrutura, denominada **flambagem**.





A **carga axial máxima** que uma coluna pode suportar antes de sofrer uma deformação é denominada **carga crítica ( $P_{cr}$ )**. Sendo assim se uma carga maior do que está for aplicada ocorrerá flambagem.

Cabe destacar que uma coluna **sempre sofrerá flambagem em torno do eixo principal** que for **menos resistente**, ou seja, ocorrerá em torno do eixo da seção transversal onde tiver o **menor momento de inércia**. Portanto a equação para flambagem para uma coluna esbelta e comprida e apoiada por pino pode ser dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{L^2}$$

Em que E é o módulo de elasticidade do material; I é o menor momento de inércia da área da seção transversal da coluna; e L é o comprimento da coluna.

A partir desta equação é determinado a **equação para a tensão crítica ( $\sigma_{cr}$ )**, que nada mais é do que a **tensão média na coluna** imediatamente após ocorrer a flambagem. Como está é uma tensão que ocorre dentro do regime elástico do material deve ser **menor do que a tensão de escoamento** do material, satisfazendo a seguinte relação  $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$ . Assim a tensão crítica pode ser dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

Onde L/r é chamado de índice de esbeltez; e (r) é o raio de giração da área da seção transversal da coluna dado pela raiz quadrada da divisão entre o menor momento de inércia pela área da seção transversal ( $r = \sqrt{I/A}$ ).

Como nem sempre as colunas são apoiadas por pinos, devemos conhecer como se determina a carga crítica e a tensão crítica em colunas com **diferentes tipos de apoios**. As equações para determinação dessas grandezas são muito parecidas com as citadas anteriormente, mas devemos utilizar um **coeficiente adimensional (K)**, chamado fator de comprimento efetivo. Este **valor**, muitas vezes **definido em norma**, é representado de acordo com comprimento efetivo da coluna, que é a distância sem apoio entre os pontos de momento nulo.

Assim a carga crítica e a tensão críticas para colunas com diferentes tipos de apoio são obtidas por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{(K \cdot L)^2} \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(K \cdot L/r)^2}$$

Vejamos os **valores do coeficiente K** para os principais **tipos de apoio** na tabela abaixo.

TIPO DE APOIO	K
Extremidade presa por pinos	1
Uma extremidade engastada e a outra livre	2
Duas extremidades engastadas	0,5



Para finalizarmos a seção, é importante você saber que a equação para determinação da **carga crítica** para uma coluna ideal é também conhecida como **equação de Euler**. Muitas vezes o examinador pode exigir o conhecimento desses pequenos detalhes para confundir você na hora de sua prova.



## 3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ufa! Encerramos aqui o conteúdo de nossa aula 00 do nosso curso. Eu sei que a carga de informação para uma aula inicial foi grande, mas fique tranquilo que a tendência é piorar! RsRsRs. Brincadeiras à parte, note que apenas em uma aula cobrimos um **vasto conteúdo**<sup>3</sup> que será **muito importante** durante o estudo de todo o nosso curso, em outras aulas **mais adiante**.

Conte comigo nessa caminhada para juntos alcançarmos o objetivo maior que é a sua **APROVAÇÃO**. Caso tenha ficado alguma dúvida, não hesite em me procurar no fórum de dúvidas ou em minhas redes sociais. Também **não** deixe de resolver todas as questões da nossa aula.

É isso! Espero que tenha gostado de nossa aula inicial. Nos vemos novamente na aula 01 do nosso curso, em que iremos abordar a dinâmica.

Forte abraço,

Prof. Juliano de Pelegrin



**SIGA MINHAS REDES SOCIAIS**

 @profjulianodp

 <https://t.me/profjulianodp>

 Prof. Juliano de Pelegrin

<sup>3</sup> Fontes bibliográficas utilizadas na aula:

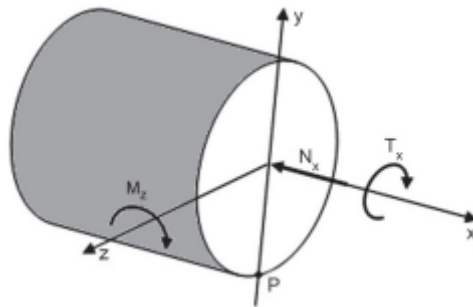
J.L.Merian/L.G.Kraige – Estática, 6ed.; R.C. Hibbeler – Estática: Mecânica para engenharia 10ª ed;

R.C.Hibbeler – Resistência dos Materiais, 7ª ed.; F.P. Beer – Resistência dos Materiais, 3ª ed.



## 4 - QUESTÕES COMENTADAS

1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Uma transmissão de movimento entre eixos paralelos é realizada por meio de um par de engrenagens helicoidais que transmitem aos eixos uma força normal  $N_x$ , um torque  $T_x$  e um momento fletor  $M_z$ , conforme ilustrado na seção transversal apresentada na Figura.



Diante desse cenário, esses esforços produzem, no cubo representativo do ponto P da seção transversal da Figura, tensões normais e cisalhantes, tais que

- A)  $\sigma_x > 0$  e  $\tau_{xz} = 0$
- B)  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xz} = 0$
- C)  $\sigma_z \neq 0$  e  $\tau_{xz} \neq 0$
- D)  $\sigma_x < 0$  e  $\tau_{xz} \neq 0$
- E)  $\sigma_x < 0$  e  $\tau_{xz} = 0$

### Comentário:

A **Alternativa D** é o gabarito da questão.

Caro aluno, para resolução da questão devemos analisar o efeito das cargas aplicadas.

Primeiramente devemos notar que força  $N_x$  gera uma compressão na face e no ponto P, conseqüentemente. Logo, ela tende a gerar uma tensão menor que zero.

O momento fletor  $M_z$  também acaba ocasionando uma tensão de compressão no ponto P devido ao seu sentido horário. Portanto, a tensão  $\sigma_x$  será a soma das tensões de compressão ocasionada pela força  $N_x$  e pelo momento  $M_z$  ambas de compressão, logo  $\sigma_x < 0$ .

Em relação ao torque  $T_x$  temos a geração de uma tensão de cisalhamento de módulo, tal que  $\tau_{xz} \neq 0$ .



2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A fratura intergranular deve ser evitada nos metais em serviço porque esse tipo de fratura

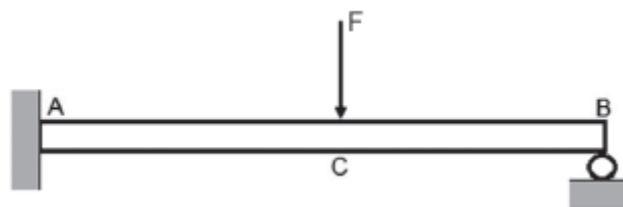
- A) causa forte deformação plástica.
- B) secciona os grãos por clivagem.
- C) absorve muita energia na sua propagação.
- D) absorve pouca energia na sua propagação.
- E) resulta de uma grande geração de discordâncias no interior dos grãos.

**Comentário:**

A fratura intergranular ocorre ao longo dos contornos de grão de um material metálico, sem grande deformação plástica. Esse tipo de fratura é considerada frágil, pois a propagação da trinca exige pouca energia, tornando o material mais suscetível a falhas catastróficas. Isso pode ser causado por segregação de impurezas nos contornos de grão, precipitação de fases frágeis ou efeitos ambientais, como corrosão sob tensão.

Portando, a **alternativa D** é o gabarito da questão.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Uma viga está apoiada em uma de suas extremidades e engastada na outra, e está suportando uma carga concentrada  $F$  no centro de seu vão.



As reações de apoio atuantes nas extremidades dessa viga são obtidas utilizando-se as

- A) condições de equilíbrio, apenas
- B) condições de equilíbrio e a Lei de Hooke
- C) condições de equilíbrio e uma equação da resistência dos materiais envolvendo a linha elástica
- D) condições de equilíbrio e uma equação relacionada à geometria da seção transversal da viga
- E) condições de equilíbrio e as informações sobre a resistência do material da viga

**Comentário:**

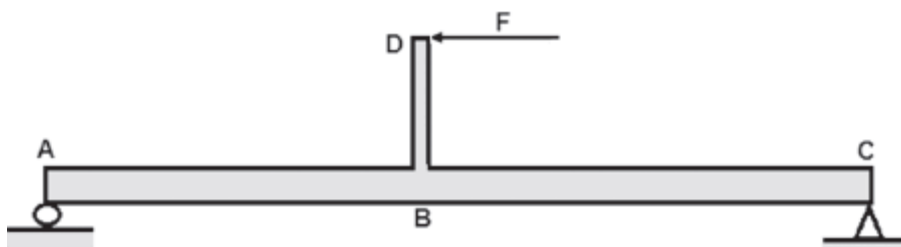


Uma viga é estaticamente determinada quando todas as reações de apoio e esforços internos podem ser resolvidos apenas com as equações de equilíbrio. Já uma viga estaticamente indeterminada possui mais incógnitas do que equações de equilíbrio disponíveis, tornando necessário o uso de equações adicionais relacionadas às deformações e deslocamentos.

No nosso caso, a viga é hiperestática, ou seja, não pode ser resolvida apenas com o equilíbrio estático. Para encontrar as reações, normalmente se remove um dos apoios (geralmente o mais simples, como o rolete em B) e usa-se o cálculo da inclinação e da deflexão ao longo da viga juntamente com as condições de equilíbrio do sistema.

Portanto, a resposta correta é a **LETRA C!**

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A viga biapoiada ABC mostrada na Figura deve suportar os efeitos da carga F atuante no ponto D, conforme indicado.



Os esforços internos atuantes no trecho BC da viga são de

- A) flexão, apenas
- B) carga axial de tração, apenas
- C) carga axial de compressão, apenas
- D) flexão combinada com carga axial de tração
- E) flexão combinada com carga axial de compressão

#### Comentário:

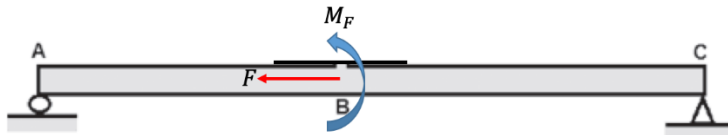
Para resolver essa questão precisamos utilizar um artifício que ajuda muito na visualização de como as forças agem nos objetos. Esse artifício é o deslocamento das forças atuantes para o ponto a ser analisado.

Nesse caso, vamos fazer uma análise da influência da força F no ponto B. Logo de cara podemos notar que essa força gera uma carga axial no trecho AB, de compressão.

Notamos também que existe certa distância entre o ponto de aplicação da força e o ponto B, por isso há também um momento atuante em B. Esse momento por sua vez induz cargas de flexão no trecho analisado, com compressão na parte superior e tração na parte inferior da viga.

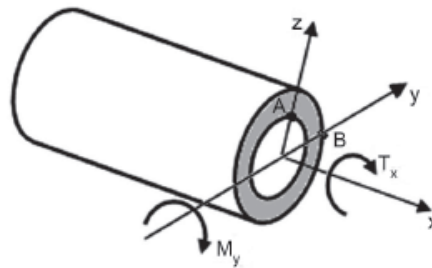
O diagrama fica da seguinte forma.





Portanto, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

5. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A seção transversal de um eixo oco está submetida à ação de um momento fletor  $M_y$  e de um torque  $T_x$ , conforme ilustrado na Figura.



Considerando-se o sistema de referência  $xyz$  ilustrado na Figura, a tensão normal  $\sigma_x$  atuante no ponto A e a tensão cisalhante  $\tau_{xy}$  atuante no ponto B da seção são, respectivamente,

- A) positiva e nula
- B) negativa e nula
- C) positiva e diferente de zero
- D) negativa e diferente de zero
- E) nula e diferente de zero

**Comentário:**

Vamos analisar separadamente cada carga e seus efeitos. Para começar vamos analisar a tensão normal no ponto A.

$$\sigma_A = -\frac{M \cdot c}{I}$$
$$\sigma_A = -\frac{-M_y \times r}{I}$$
$$\sigma_A = \frac{M_y \times r}{I}$$



Perceba que a tensão no ponto A é positiva, o que é possível visualizar através da figura. O eixo y é a linha neutra, o que está acima está sendo tracionado e o que está abaixo é comprimido.

Seguimos para analisar o ponto B. A tensão cisalhante gerada pelo torque  $T_x$  atua apenas no plano yz e por isso o valor de  $\tau_{xy}$  é nulo.

Dessa forma, a **alternativa A** está CORRETA pois apresenta como resposta "positiva e nula".

6. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Em um projeto a determinação das dimensões da seção transversal de uma viga utiliza a expressão da tensão normal de flexão,  $\sigma = Mc/I$ , na qual M é o momento fletor máximo, c é a distância entre a linha neutra e a fibra mais afastada da linha neutra, e I é o momento de inércia da seção. Essa tensão é comparada à tensão admissível do projeto, e o módulo de resistência à flexão necessário ( $W = I/c$ ) é determinado.

Considerando-se que a seção transversal seja retangular, de base b e altura h, esse módulo será expresso por

- A)  $bh/6$
- B)  $bh/12$
- C)  $bh^2/6$
- D)  $bh^3/6$
- E)  $bh^3/12$

#### Comentário:

O módulo de resistência à flexão (W) é definido como:

$$W = \frac{I}{c}$$

Para uma seção retangular de base b e altura h, o momento de inércia (I) em relação ao eixo neutro (eixo que passa pelo centro da seção) é dado por:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

A distância da linha neutra até a fibra mais afastada (c) é:

$$c = \frac{h}{2}$$

Agora, substituímos esses valores na equação do módulo de resistência à flexão:

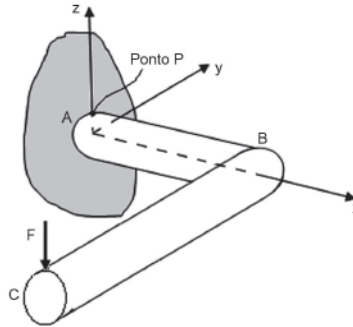
$$W = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}$$



$$W = \frac{bh^2}{6}$$

Sendo assim, a **alternativa C** está CORRETA!

7. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) O acionamento de abertura de uma porta é constituído de uma estrutura em que pode ser identificado um trecho AB perpendicular a um trecho BC, ambos de seção transversal circular com diâmetro constante, conforme a Figura.



Considerando-se o sistema de referência xyz representado na Figura, verifica-se que no ponto P da seção transversal no engaste são nulas as tensões

- A)  $\sigma_x, \tau_{xy}$  e  $\tau_{yz}$
- B)  $\sigma_x, \tau_{yz}$  e  $\sigma_z$
- C)  $\sigma_y, \tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$
- D)  $\sigma_z, \tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$
- E)  $\sigma_y, \sigma_z$  e  $\tau_{yz}$

#### Comentário:

Para resolver esta questão, precisamos entender como a força F age sobre o engaste, decompondo-a em seus efeitos principais:

**Momento Torsor (Mt):**  $M_t = F \times \overline{BC}$

**Momento Fletor (Mf):** Provoca flexão na estrutura, determinado por  $M_f = F \times \overline{AB}$

**Força Cortante (V):** Corresponde à própria força F.

Agora, vamos analisar o que cada um desses esforços provoca na viga:

O **momento torsor** gera **tensão cisalhante** no plano xy. Podemos eliminar as alternativas A, C e D.

O **momento fletor** causa uma **tensão normal  $\sigma_x \neq 0$** . Eliminamos então a alternativa B.

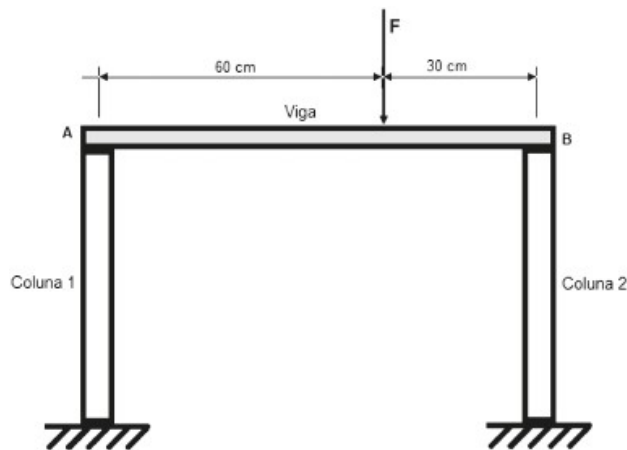


A **força cortante** não gera tensão cisalhante relevante no ponto analisado, pois, nas extremidades, esse efeito é nulo.

Após a análise notamos que somente a alternativa E não foi eliminada. As tensões apresentadas nessa alternativa ( $\sigma_y, \sigma_z$  e  $\tau_{yz}$ ) são nulas no ponto P.

A alternativa CORRETA é a **letra E!**

8. (CESGRANRIO/ELETRONUCLEAR-2022) A viga AB mostrada na Figura suporta uma carga F na posição indicada.



As colunas 1 e 2 são idênticas, isto é, mesmo material, mesmo comprimento e mesma seção transversal, e a viga é simplesmente apoiada sobre as colunas.

Nessas condições, as deformações ( $\delta$ ) sofridas pelas colunas 1 e 2 são tais que

- A)  $\delta_1 = \delta_2$
- B)  $\delta_1 = 2\delta_2$
- C)  $\delta_1 = 3\delta_2$
- D)  $\delta_2 = 2\delta_1$
- E)  $\delta_2 = 3\delta_1$

#### Comentário:

O primeiro passo para responder essa questão corretamente é determinar os esforços em cada barra. Para isso utilizaremos a somatória de momentos no ponto B.

$$\sum M_B = 0$$

$$F_1 \times 0,9 - F \times 0,3 = 0$$



$$F_1 = \frac{F}{3}$$

Agora através do somatório de forças em y vamos encontrar a relação entre as forças atuantes nas barras.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 + F_2 - F = 0$$

$$F_2 = \frac{2F}{3}$$

Basta então calcular a deformação em cada barra e compará-las.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \times L}{A \times E}$$

$$\delta_1 = \frac{FL}{3AE}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \times L}{A \times E}$$

$$\delta_2 = \frac{2FL}{3AE}$$

Comparando os valores:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\frac{2FL}{3AE}}{\frac{FL}{3AE}}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 2$$

$$\delta_2 = 2\delta_1$$

A **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

9. (CESGRANRIO/ELETRONUCLEAR-2022) Considere o gráfico tensão versus deformação de engenharia apresentado abaixo para os materiais puros Cu, Ni e Ti.







Uma oficina mecânica precisa fazer uma haste com seção quadrada de 1 mm de lado para suportar uma carga de tração de 150 N, sem deformação plástica.

Que material(is), dentre o(s) apresentado(s) no gráfico pode(m) ser empregado(s) para fazer essa haste?

- A) Cu, apenas
- B) Cu e Ni, apenas
- C) Cu e Ti, apenas
- D) Ni e Ti, apenas
- E) Cu, Ni e Ti

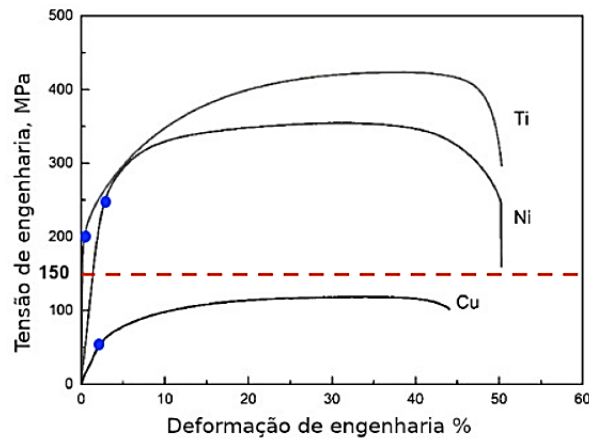
**Comentário:**

Vamos analisar qual a tensão atuante nessa haste.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$\sigma = \frac{150}{0.001 \cdot 0.001}$$
$$\sigma = 150MPa$$

Agora devemos traçar a linha de tensão e os limites elásticos de cada material no gráfico.





Como podemos visualizar, os únicos materiais que apresentam limite elástico acima da linha de tensão são Ti e Ni.

Portanto a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

10. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Duas vigas biapoiadas ( $V_1$  e  $V_2$ ), com comprimentos, materiais e áreas de seção transversal idênticas, são solicitadas por cargas concentradas também idênticas no meio de seu vão.

Se os momentos de inércia das seções transversais das duas vigas são tais que  $I_1 > I_2$ , as tensões normais máximas atuantes nas duas vigas ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) serão tais que

- A)  $\sigma_1 > \sigma_2$ , pois  $I_1 > I_2$ .
- B)  $\sigma_1 < \sigma_2$ , pois  $I_1 > I_2$ .
- C)  $\sigma_1 = \sigma_2$ , pois os materiais são idênticos.
- D)  $\sigma_2 = \sigma_1$ , pois as áreas das seções transversais são idênticas.
- E)  $\sigma_1$  pode ser maior, menor ou igual a  $\sigma_2$ , pois a tensão normal depende de outros parâmetros.

**Comentário:**

A equação que determina a tensão normal máxima em uma viga submetida à flexão é:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I}$$

onde:

- $\sigma$  é a tensão normal máxima,
- $M$  é o momento fletor máximo,
- $c$  é a distância da linha neutra até a fibra mais extrema da seção transversal,
- $I$  é o momento de inércia da seção transversal.



Olhando rapidamente a equação podemos pensar equivocadamente que a viga que apresentar o maior valor de  $I$ , terá o menor valor de tensão. Porém acabamos esquecendo de outro fator presente na equação, o valor  $c$ .

Apesar do valor  $M$  ser o mesmo para ambos os casos devido à carga e o comprimento das vigas serem iguais, nada é dito sobre o formato da seção transversal das vigas. O formato interfere diretamente na tensão de flexão devido ao valor  $c$  encontrado na equação. Podemos ter 2 vigas com mesma área transversal, com valores bem distintos de  $c$  e  $I$ .

Por isso, não é possível afirmar qual seria a condição de tensão nas vigas apenas com as informações descritas no enunciado. Sendo assim a **alternativa E** se faz CORRETA!

**11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere uma barra carregada axialmente. O estado de tensões gerado para um ponto qualquer da barra é tal que  $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$  e  $\sigma_z = 0$**

Para essa situação, não será(ão) nula(s) a(s) deformação(ões)

- A)  $\epsilon_x$ , apenas
- B)  $\epsilon_y$ , apenas
- C)  $\epsilon_z$ , apenas
- D)  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , apenas
- E)  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$

#### Comentário:

Quando um corpo é carregado em um eixo e este apresenta deformação, seja de alongamento ou encurtamento devido à tensões de tração ou compressão, há deformações laterais nos outros eixos também. O coeficiente que relaciona esse tipo de deformação é o coeficiente de Poisson. Veja abaixo.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}} = \left| \frac{\text{deformação específica transversal}}{\text{deformação específica longitudinal}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Segundo o enunciado, o carregamento axial se situa no eixo  $x$  pois é o único que apresenta tensão normal diferente de zero. Dessa forma, caso o corpo sofra deformações na direção do eixo  $x$  haverá também deformações do corpo nas direções dos eixos  $y$  e  $z$ , proporcionais ao coeficiente de Poisson.

Portanto, as deformações  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$  não serão nulas. **Alternativa E** CORRETA!

**12. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Um cubo de lado  $L$  foi construído com um material que possui um módulo de Young de 200 GPa e uma constante de Poisson de 0,33. Esse cubo é submetido a um estado plano de tensões compressivas elásticas sem nenhuma tensão cisalhante,  $|\sigma_X| = |\sigma_Y| = 200$  MPa.**

Qual o valor da deformação percentual na direção  $z$ ?



- A) 0,066%
- B) 0,033%
- C) 0,0%
- D) -0,033%
- E) -0,066%

### Comentário:

Para resolver essa questão precisamos utilizar o princípio da superposição. Esse princípio conta que a deformação de um corpo é dada pela soma das deformações causadas por cada carregamento individualmente.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_x} \rightarrow \epsilon_{zx} = -\nu \cdot \epsilon_x$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_y} \rightarrow \epsilon_{zy} = -\nu \cdot \epsilon_y$$

Sabendo que:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y = E \cdot \epsilon_y \rightarrow \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

Substituindo nas equações anteriores, temos:

$$\epsilon_{zx} = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_{zy} = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

Agora, vamos utilizar os valores fornecidos no enunciado para calcular as deformações separadamente.

$$\epsilon_{zx} = -0,33 \cdot \frac{-200MPa}{200GPa} = 0,033\%$$

$$\epsilon_{zy} = -0,33 \cdot \frac{-200MPa}{200GPa} = 0,033\%$$

Somando as deformações, temos:

$$\epsilon_z = \epsilon_{zx} + \epsilon_{zy} = 0,033 + 0,033 = 0,066\%$$



A alternativa A está CORRETA e é o gabarito da questão!

13. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma haste, de seção reta quadrada, cujo lado mede  $a$  cm e de comprimento 1 m, será empregada em um projeto para suportar uma carga trativa de 80 kN ao longo do comprimento com uma deformação elástica máxima de 0,04 cm. A haste será feita de um material que apresenta um módulo de Young de 200 GPa e um limite de escoamento de 40 MPa.

Assim sendo, o lado da seção quadrada da haste (com estimativa de  $\pm 1$  mm) deverá ser de, no mínimo,

- A) 32
- B) 16
- C) 45
- D) 42
- E) 35

#### Comentário:

Devemos analisar essa questão sobre 2 critérios, pelo limite de escoamento e pela deformação elástica máxima, selecionando o maior valor de  $a$  entre elas.

Pela tensão de escoamento, basta utilizar  $a^2$  como  $A$  na equação base da tensão normal.

$$\sigma_e = \frac{F}{A}$$
$$a = \sqrt{\frac{F}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^6}}$$
$$a = 45 \text{ mm}$$

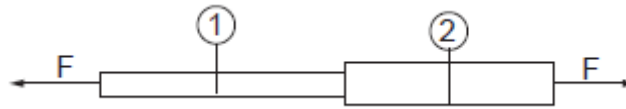
Agora devemos calcular o valor de  $a$  pela deformação e comparar com o encontrado anteriormente.

$$\delta = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$$
$$a = \sqrt{\frac{F \cdot L}{\delta \cdot E}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \cdot 10^9}}$$
$$a = 32 \text{ mm}$$



Como o valor de 45 mm foi o maior, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão!

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) A barra de seção variável mostrada na Figura abaixo está sujeita a uma força axial trativa  $F$ .



As tensões normais admissíveis e as seções transversais da barra são tais que  $\sigma_1 = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$ ,  $A_1 = 2,0 \text{ cm}^2$  e  $A_2 = 4,0 \text{ cm}^2$ .

A força  $F$  máxima, expressa em kN, que pode ser aplicada à barra, sem que as tensões admissíveis sejam ultrapassadas é de

- A) 10
- B) 20
- C) 25
- D) 40
- E) 50

#### Comentário:

Com os conhecimentos aprendidos até aqui, essa questão vai ser moleza!

Para descobrir qual a força máxima que pode ser aplicada sem ultrapassar os limites devemos reorganizar a equação da tensão e analisar ambos os segmentos. O que apresentar menor força será o limite. Vamos lá?

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma \cdot A$$

$$F_1 = \sigma_1 \cdot A_1$$

$$F_1 = 250 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$$

$$F_1 = 50 \text{ kN}$$

Para o segundo segmento, temos:

$$F_2 = \sigma_2 \cdot A_2$$

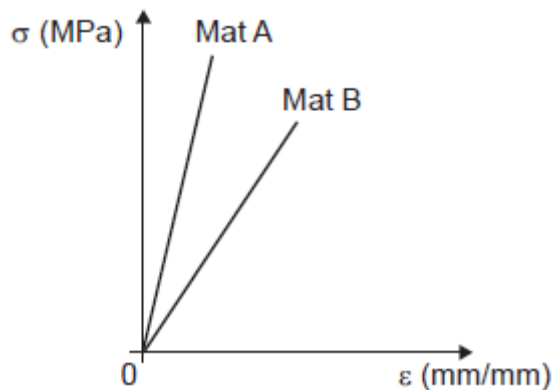
$$F_2 = 100 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$$



$$F_1 = 40kN$$

Portanto, a força limite para que as tensões não sejam ultrapassadas é 40kN. A **alternativa D** está CORRETA!

15. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Os resultados de um ensaio de tração realizado na região de comportamento elástico linear de dois corpos de prova de materiais dúcteis distintos (A e B) são representados pelas retas no diagrama tensão x deformação mostrado na Figura abaixo.



A propriedade com maior valor no material A do que no material B, segundo esses resultados, é a(o)

- A) alongamento percentual
- B) módulo de elasticidade
- C) massa específica
- D) tensão de ruptura
- E) tensão de escoamento

#### Comentário:

O gráfico apresentado é um diagrama tensão-deformação na região elástica linear, onde a inclinação da reta representa o módulo de elasticidade ( $E$ ), também chamado de módulo de Young.

A Lei de Hooke define essa relação como:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

onde:

$\sigma$  = tensão (MPa)

$\varepsilon$  = deformação específica (mm/mm)

$E$  = módulo de elasticidade (MPa)



No gráfico, o material A apresenta uma inclinação maior do que o material B, indicando que o módulo de elasticidade de A é maior que o de B ( $E_A > E_B$ ).

A **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

**16. (CESGRANRIO/EMAP-2018) Com base nos conceitos da mecânica dos materiais, julgue o item a seguir.**

O módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson são parâmetros que permitem determinar a resistência de um corpo de material isotrópico à deformação elástica na direção da tensão normal aplicada, quando esse corpo está submetido a cargas mecânicas.

**Comentário:**

O **item** está incorreto. O módulo de cisalhamento de um material, também chamado de módulo de Coulomb, módulo de rigidez ou módulo de torção. Ele é definido como a razão entre a tensão de cisalhamento aplicada ao corpo e a sua deformação específica.

Em se tratando de material isotrópico, o módulo de cisalhamento se relaciona com o módulo de Young e o coeficiente de Poisson por:

$$\nu = \left( \frac{E}{2G} \right) - 1$$

Em que o coeficiente de Poisson é adimensional e o módulo de Young em Pascal.

A questão 12 é uma questão que está gerando bastante discussão.

O coeficiente de Poisson determina a deformação lateral ou longitudinal e o módulo de cisalhamento é relacionado a tensão de cisalhamento. Desta forma, **o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, permite determinar a rigidez de um corpo de material isotrópico.**

**17. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma equipe de obra resolveu empregar um cabo de nylon (limite de escoamento = 45 MPa, limite de resistência mecânica = 90 MPa.) para manter suspensa uma carga de 2000 N. O cabo possui uma seção reta circular.**

Dado: Estime o valor com erro de 0,1 mm

Qual o menor diâmetro, em milímetros, capaz de suportar essa carga dentro do regime elástico?

- a) 1,9
- b) 2,7
- c) 3,8
- d) 5,4
- e) 7,5

**Comentário:**





Para que um material suporte uma carga dentro de seu regime elástico, a tensão provocada pela carga aplicada não pode ser maior do que a tensão de escoamento deste. Assim podemos solucionar a questão da seguinte maneira:

$$\sigma_{esc} \geq \frac{P}{A} \Rightarrow 45Mpa = \frac{2000N}{\frac{\pi D^2}{4}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{2000 \cdot 4}{45\pi}} \cong 7,5mm$$

Note que não precisamos alterar as unidades, uma vez que **N/mm<sup>2</sup> é igual a Mpa**. Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

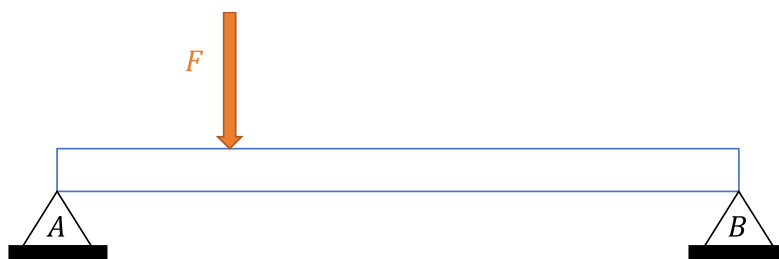
**18. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma viga biapoiada de comprimento L está sujeita a uma força concentrada F atuante a uma distância L/4 de uma de suas extremidades.**

O momento fletor máximo e a força cisalhante máxima atuantes na viga são expressos, respectivamente, por

- a) FL/4 e F/4
- b) FL/4 e 3F/4
- c) 3FL/4 e F/4
- d) 3FL/16 e F/4
- e) 3FL/16 e 3F/4

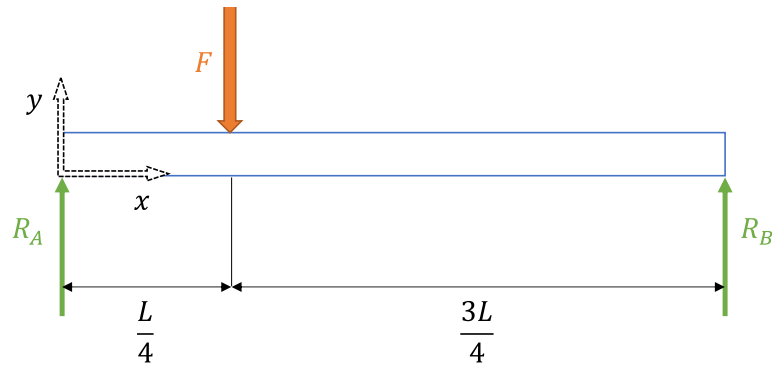
**Comentário:**

Prezado(a), para resolvermos essa questão primeiramente devemos conceber a sua disposição e o seu diagrama de corpo livre. Vejamos:



**Viga biapoiada com carga concentrada**





### Diagrama de Corpo Livre

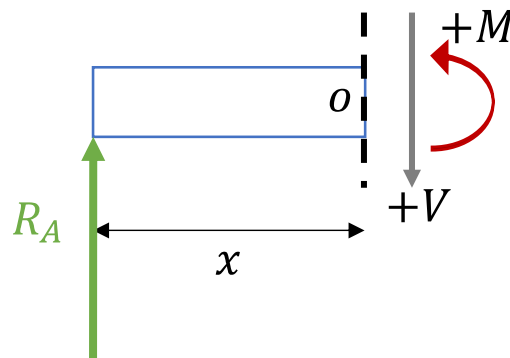
Vamos agora estabelecer as equações dos esforços internos (momento fletor e esforço cortante) em função da coordenada  $x$ .

Primeiramente vamos encontrar as resultantes nos pontos  $A$  e  $B$  através das equações do equilíbrio. Vejamos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + R_A + R_B = 0 \Rightarrow F = R_A + R_B$$

$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot \frac{L}{4} + R_B \cdot L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{4} \therefore R_A = \frac{3F}{4}$$

Feito isso, vamos determinar as equações para os esforços internos no trecho do apoio da esquerda até a carga ( $0 < x < L/4$ ).

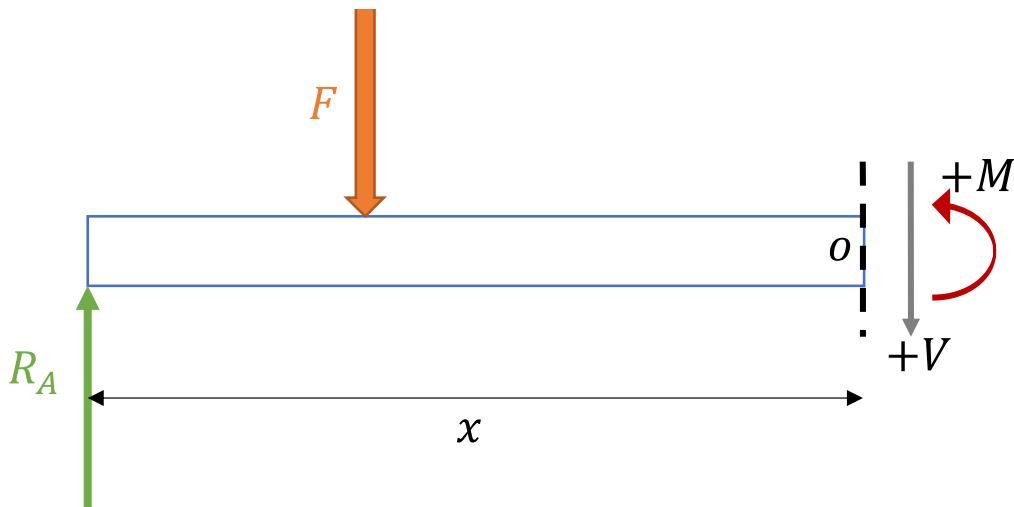


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = R_A = \frac{3 \cdot F}{4}$$

$$+\sum M_o = 0 \Rightarrow M = R_A \cdot x = \frac{3 \cdot F \cdot x}{4}$$

Agora, vamos determinar as equações para os efeitos internos no trecho entre a carga e o apoio da direita ( $L/4 < x < L$ )





$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V + R_A - F = 0 \Rightarrow V = -\frac{F}{4}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow M - R_A \cdot x + F \left(x - \frac{L}{4}\right) = 0 \Rightarrow M = \frac{FL}{4} - \frac{Fx}{4}$$

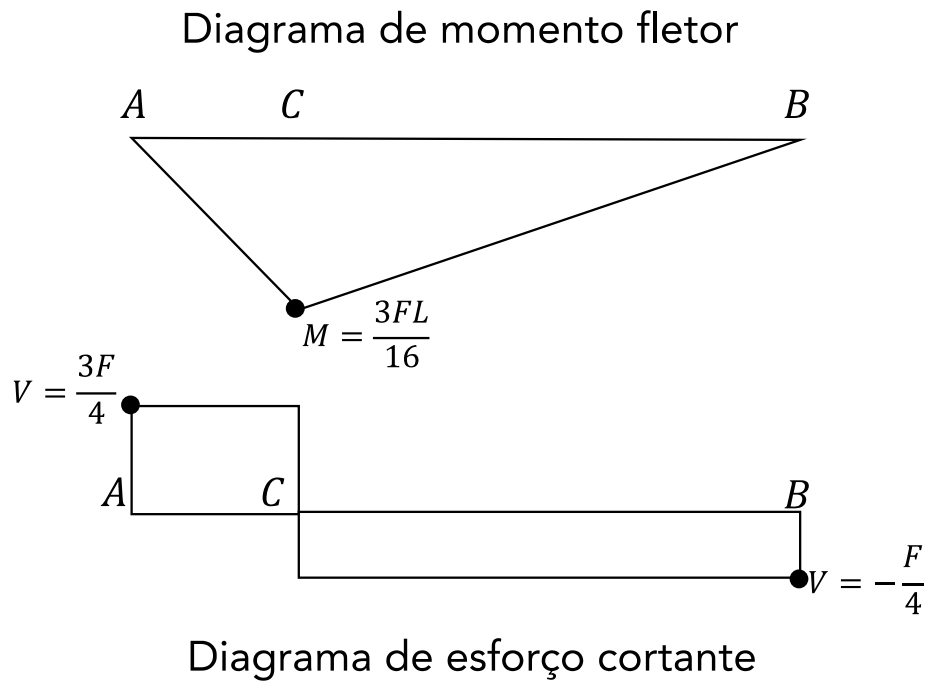
Note que os esforços cortantes são constantes em cada trecho e o momento fletor varia de acordo com \$x\$. Realizando a análise das equações encontradas temos que:

$p/x = 0$	$p/x = \frac{L}{4}$	$p/x = L$
$V = \frac{3 \cdot F}{4}$	Descontinuidade	$V = -\frac{F}{4}$
$M = 0$	$M = \frac{3FL}{16}$	$M = 0$

Portanto, o momento fletor máximo encontra-se em \$x=L/4\$ e o esforço cortante máximo encontra-se na seção entre o apoio da esquerda e a carga. Logo, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

A figura abaixo representa os diagramas de momento fletor e esforço cortante para toda a viga, em que o ponto C é o local onde a carga é aplicada.





19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere uma barra de seção transversal constante sujeita a uma tensão normal de tração com valor de 200 MPa. Se a força axial atuante na barra vale 50 kN, sua área de seção transversal, expressa em cm<sup>2</sup>, é de

- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 4,0

#### Comentário:

Prezado(a) estrategista, para resolvermos essa questão devemos conhecer o conceito de tensão normal. Quando uma barra é submetida a uma força axial, aquela que atua na mesma direção do seu eixo, esforços internos distribuídos por toda a área de sua seção transversal surgem de forma a "anular" a força aplicada.

Esses esforços distribuídos possuem uma força resultante  $F$  perpendicular a seção transversal igual a força aplicada e a razão entre a força e a área da seção transversal é chamada de tensão normal com sua unidade sendo dada em Pascal. Vejamos:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{Força [N]}}{\text{Área da seção transversal [m}^2\text{]}}$$



Quando a força traciona (estica a barra) teremos uma força de tração, com sinal positivo. Caso a força comprima a barra teremos uma tensão de compressão, com sinal negativo.

Substituindo os valores, fornecidos no enunciado, na equação acima obtemos.

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{50 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Note que as alternativas são dadas em  $\text{cm}^2$ , por isso devemos converter o resultado obtido.

$$0,25 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2] \cdot \left[ \frac{10^4 \cdot \text{cm}^2}{1 \cdot \text{m}^2} \right] = 2,5 \text{ cm}^2$$

Portanto, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Um eixo de comprimento  $L$  é engastado em uma de suas extremidades e possui uma engrenagem na outra extremidade que transmite a ele um torque  $T$ , que, por sua vez, gera uma tensão cisalhante máxima  $\tau$  no eixo.

Se o comprimento do eixo fosse  $L/2$ , a tensão cisalhante gerada seria

- a)  $\tau/2$
- b)  $\tau/4$
- c)  $\tau/8$
- d)  $2\tau$
- e) inalterada

#### Comentário:

Caro(a) aluno(a), a tensão de cisalhamento será maior quanto mais distante for do ponto analisado do centro da seção transversal e será menor quanto maior for o momento polar de inércia dessa seção. Matematicamente podemos expressar a tensão de cisalhamento máxima,  $\tau_{m\acute{a}x}$ , no eixo em sua superfície externa como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot c}{J}$$

Em que  $T$  é o **torque interno** resultante agindo na seção transversal, que pode ser calculado pelo método das seções combinado com a aplicação das equações de equilíbrio de momento aplicada a linha centroidal do eixo,  $J$  é o momento polar de inércia da área e  $c$  é o raio externo do eixo analisado.

Note que o comprimento do eixo não apresenta efeito nenhum sobre a tensão de cisalhamento por torção. Logo, se o comprimento do eixo fosse  $L/2$ , conforme o enunciado, a tensão cisalhante gerada seria inalterada. Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.



21. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma barra com 1 m de comprimento é submetida a um carregamento axial,  $F$ , de 10 kN, como mostra a Figura abaixo.

Considerando a seção transversal,  $A_0$ , de  $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e o módulo de elasticidade,  $E$ , do aço, de 200 GPa ( $200 \times 10^9 \text{ Pa}$ ), o alongamento ( $\Delta l$ ) do tubo, em m, é

- a)  $10^{-2}$
- b)  $10^{-3}$
- c)  $10^{-4}$
- d)  $10^{-8}$
- e)  $10^{-10}$

**Comentário:**

Caro(a) estrategista, podemos resolver esta questão pelo famoso principio de Saint-Venant, bastando conhecer a seguinte equação para o cálculo da deformação elástica de um elemento.

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

Em que  $P$  é a carga,  $E$  o módulo de elasticidade e  $A$  a área da seção transversal. Aplicando as grandezas do enunciado na equação obtemos:

$$\delta = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^9} = \frac{1}{1000} = 10^{-4}$$

Caso na hora de sua prova você não se lembre desta equação, você pode chegar até ela a partir da **manipulação algébrica de equações conhecidas**, como a lei de Hooke, a de tensão normal e a de deformação de engenharia. Vejamos:

$$\sigma = E \cdot \epsilon; \quad \sigma = \frac{P}{A}; \quad \epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{P \cdot L_0}{A \cdot E}$$

Portanto, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

22. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere as três vigas planas, estaticamente indeterminadas, mostradas na Figura a seguir.

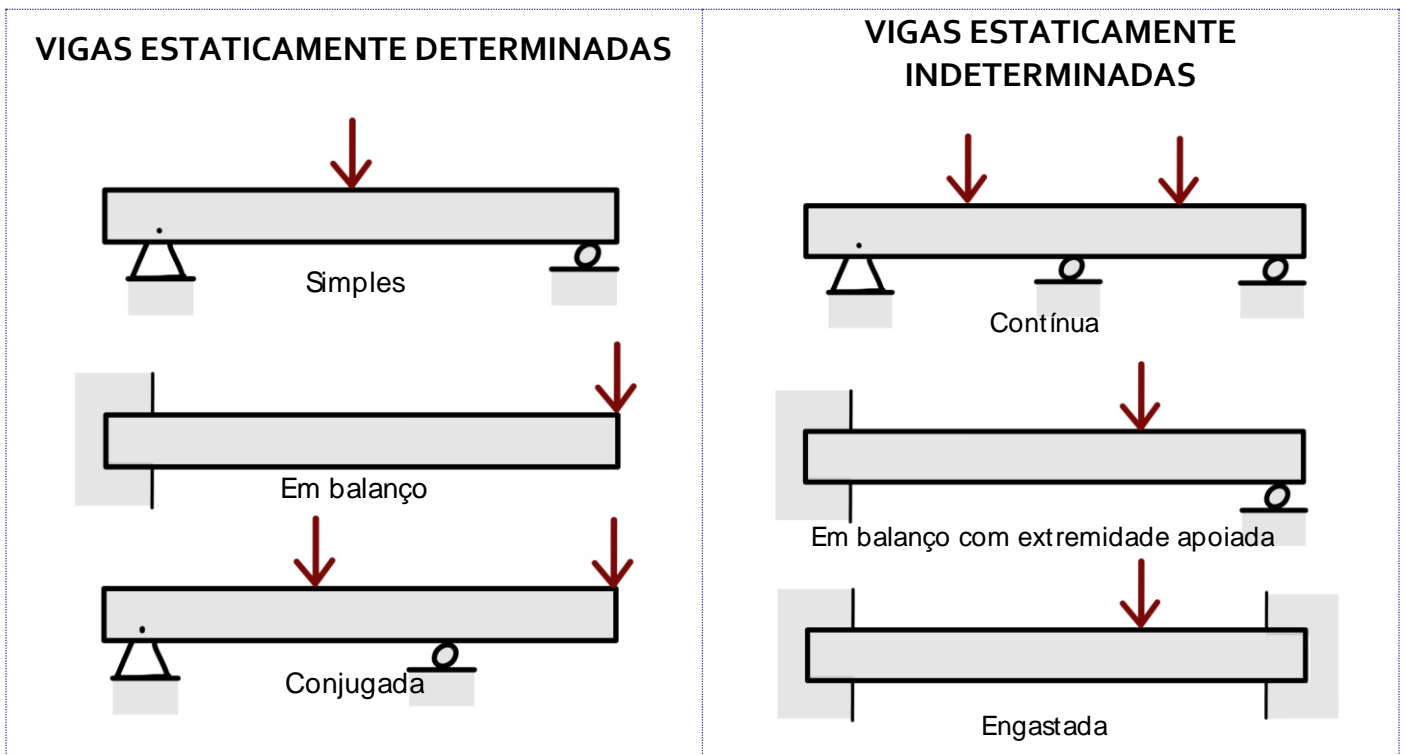


Ao retirar-se uma das restrições de apoio de cada uma dessas vigas, aquela(s) que se tornará(ão) estaticamente determinada(s) é(são), APENAS, a(s) viga(s)

- a) 1
- b) 2
- c) 1 e 3
- d) 1 e 2
- e) 2 e 3

**Comentário:**

Prezado(a), o segredo desta questão está no termo **restrição de apoio**. Apenas as vigas 1 e 3 possuem restrições de apoio enquanto a viga 2 apresenta dois engastes. Vejamos a tabela abaixo com exemplos de vigas estaticamente determinadas e estaticamente indeterminadas.

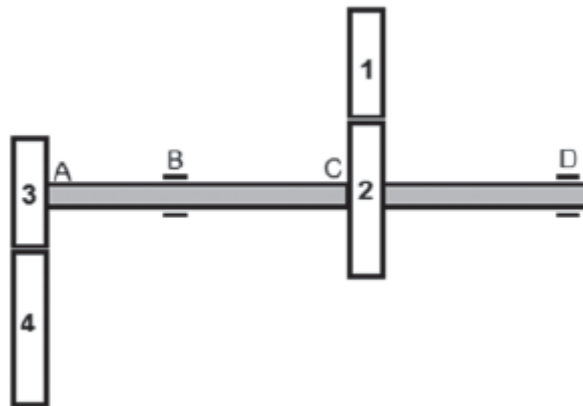


Basicamente, as vigas que se encontram apoiadas, de maneira que podemos calcular as reações aos seus apoios externos aplicando somente os métodos da estática (equações de equilíbrio), são chamadas de vigas estaticamente determinadas. Vigas que possuem mais pontos de apoios do que o necessário para que estejam em equilíbrio, são denominadas estaticamente indeterminadas (possuem maior número de reações de apoios do que equações de equilíbrio).

Desta forma, as vigas 1 e 3 ao retirar-se uma das restrições de apoio dessas vigas, se tornarão estaticamente determinadas, pois passarão a ser duas vigas engastadas em balanço. Portanto, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.



23. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) O sistema de transmissão mostrado na Figura abaixo é constituído de dois pares de engrenagens e um eixo. As engrenagens 1 e 3 possuem raios idênticos de 8 cm, e as engrenagens 2 e 4 possuem raios idênticos de 12 cm.



O diagrama de torques atuantes no eixo ABCD apresenta valores não nulos no(s) trecho(s)

- A) AB, apenas
- B) BC, apenas
- C) AB e BC, apenas
- D) AB e CD, apenas
- E) AB, BC e CD

**Comentário:**

O torque nesse tipo de sistema é comumente aplicado em uma engrenagem externa com objetivo de ser transferido à outra engrenagem externa. Portanto, suponhamos que o torque seja aplicado na engrenagem 1, este será transferido para a engrenagem 2, em sequência para o eixo e após para as engrenagens 3 e 4, sucessivamente. Fazendo essa análise, notamos que o trecho AB e BC do eixo contribuem para a transmissão do torque. O trecho CD não apresenta qualquer transmissão de torque através do eixo pois não possui carga resistiva (engrenagem, correia, freio etc.).

Portanto, a resposta correta é a **letra C**.

24. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma viga engastada em uma de suas extremidades e livre na outra é solicitada por uma força  $F$ , concentrada no meio de seu comprimento.

Se a distância entre as extremidades da viga é  $L$ , o momento fletor atuante na extremidade engastada é calculado pela expressão

- a)  $F.L$
- b)  $F.L/2$

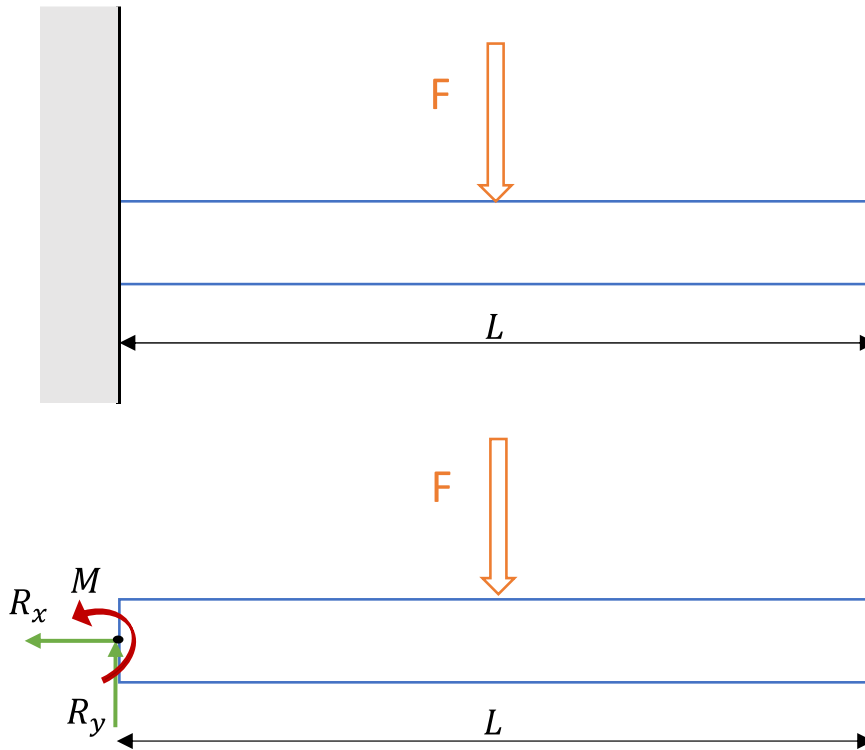




- c)  $F.L/4$
- d)  $F.L^2/2$
- e)  $F.L^2/4$

**Comentário:**

Para resolvermos essa questão devemos conceber o correto formato do sistema bem como seu diagrama de corpo livre. Vejamos:



Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Assim, o momento no ponto O, para esta viga estática que deve respeitar a equação do equilíbrio para o momento, onde está o engaste será:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M - F \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{FL}{2}$$

Note que a distância de atuação da força até o ponto O é a metade do comprimento da viga. Logo, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

25. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) Uma das importantes etapas do projeto estático de um componente estrutural é a construção do diagrama de corpo livre do componente.

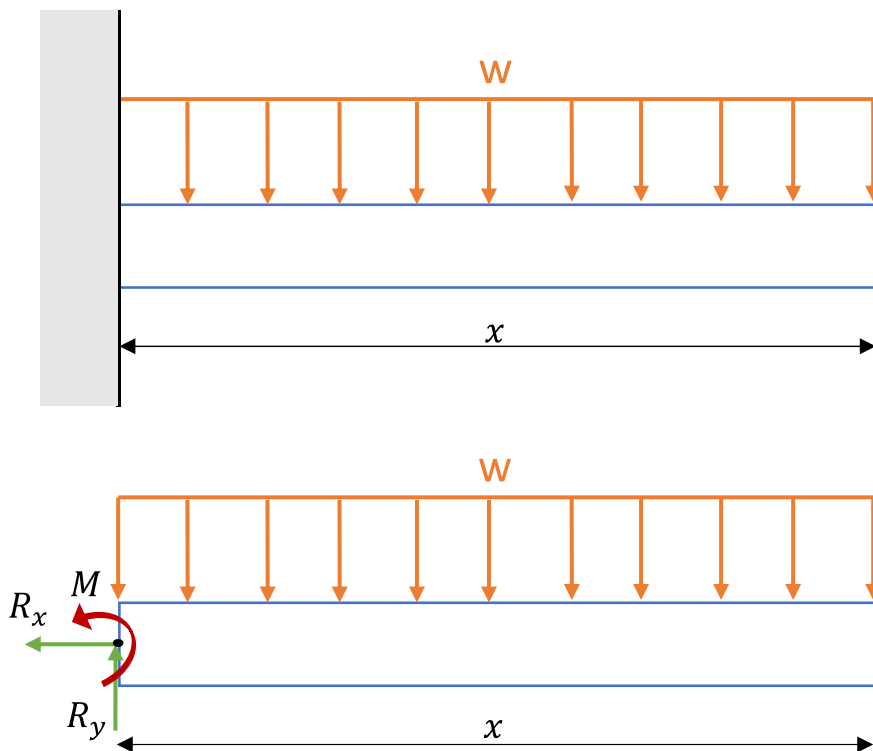


No diagrama de corpo livre de uma viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído ao longo de seu comprimento, são representados(as)

- a) o carregamento externo e as reações de apoio
- b) o carregamento externo e a distribuição de momentos fletores
- c) o carregamento externo e a distribuição dos esforços cisalhantes
- d) os carregamentos externos, apenas
- e) as distribuições de esforços cisalhantes e de momentos fletores

### Comentário:

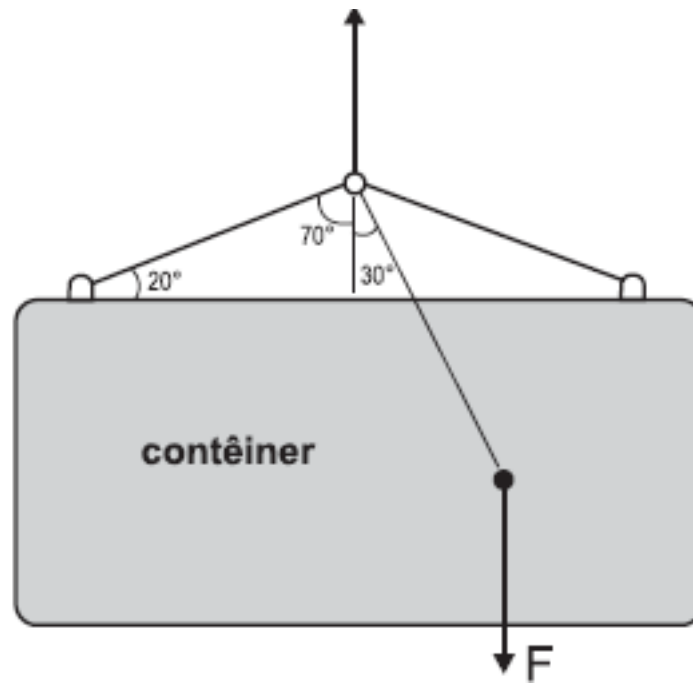
“Questãozinha mamão com açúcar”. O diagrama de corpo livre ou DCL consiste em um esquemático de todas as forças que atuam em um corpo quando isolamos este do sistema ao qual pertence. Neste caso nosso corpo em análise é a viga e as forças serão o carregamento distribuído externo e as reações de apoio. Vejamos:



Portanto, a **alternativa A** está CORRETA é o gabarito da questão.

26. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) Um contêiner é suspenso por um sistema de cabos, conforme ilustrado na Figura abaixo.



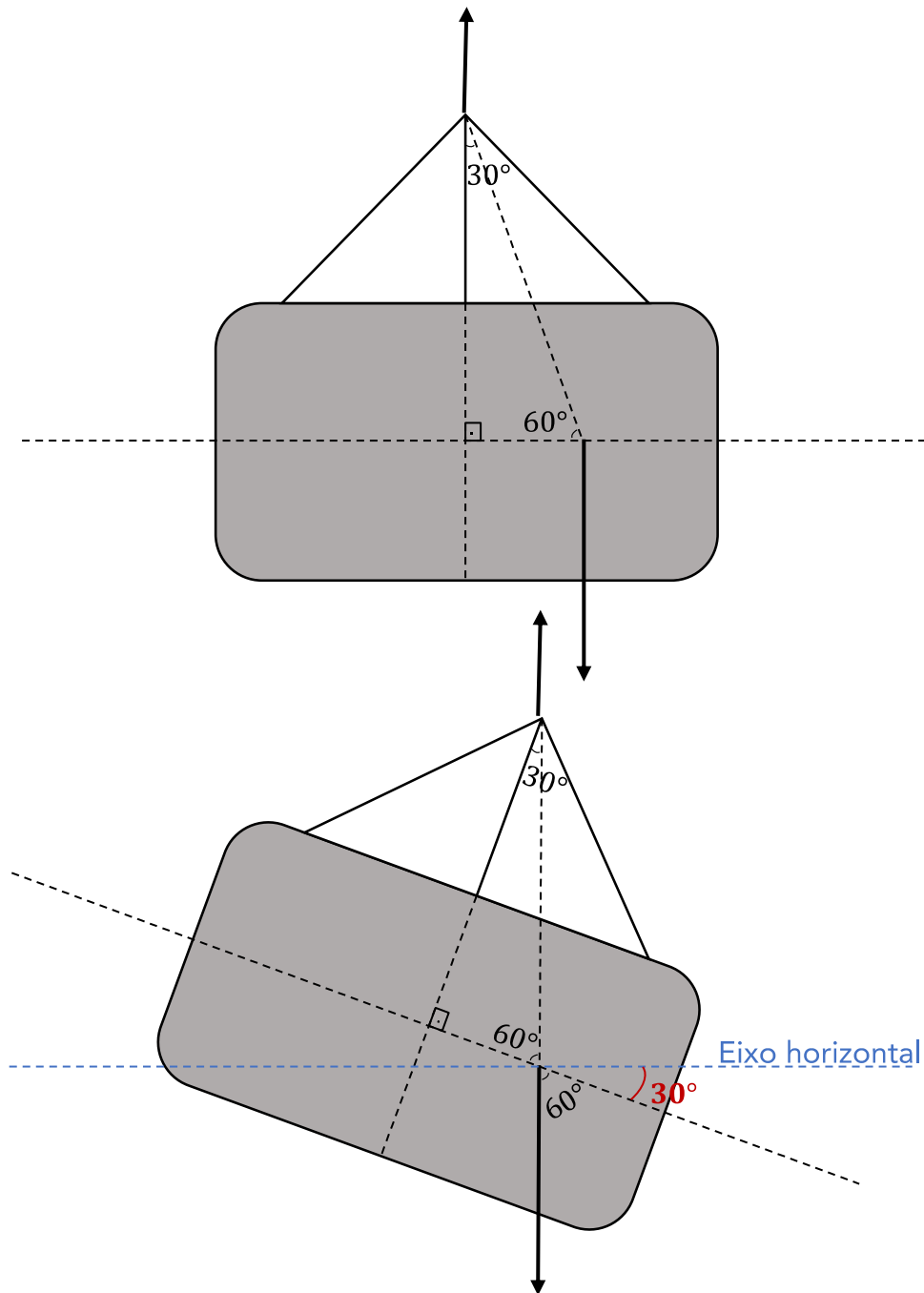


Se a força  $F$  resultante do peso do contêiner e da carga em seu interior é posicionada conforme indicado, o ângulo de inclinação em relação à horizontal, quando o sistema estiver em equilíbrio estático, será igual a

- a)  $20^\circ$
- b)  $30^\circ$
- c)  $45^\circ$
- d)  $60^\circ$
- e)  $70^\circ$

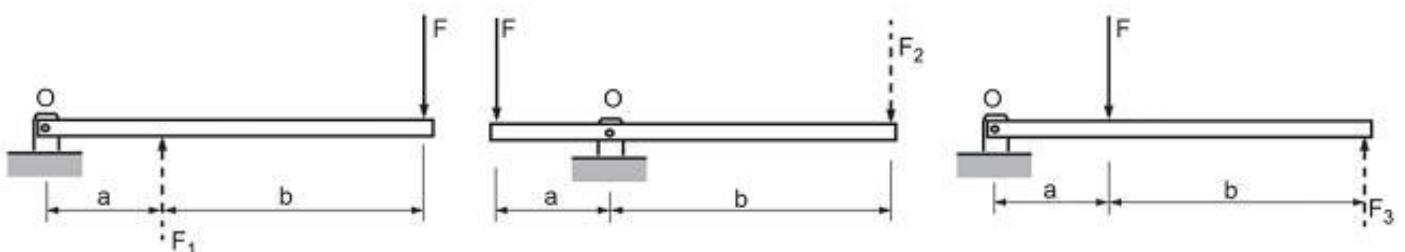
#### Comentário:

Podemos solucionar essa questão apenas com uma observação lógica, pois devido ao posicionamento da carga dentro do contêiner a força  $F$  está deslocada do seu centro. Quando a carga for içada haverá uma inclinação no contêiner de modo a força  $F$  se posicione exatamente abaixo do nó central que está sendo realizada a força para cima. Vejamos:



Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

27. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) A Figura abaixo mostra três sistemas de alavanca nos quais a força  $F$  é a força aplicada,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são as forças resistentes e  $b > a$ .



De modo a se determinar a configuração que apresenta a maior força resistente, avaliou-se o equilíbrio de cada alavanca. Essa análise resultou na relação entre  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , expressa por

- a)  $F_1 = F_2 = F_3$
- b)  $F_1 < F_2 < F_3$
- c)  $F_1 > F_2 > F_3$
- d)  $F_1 = F_2$  e  $F_3 < F_2$
- e)  $F_1 = F_2$  e  $F_3 > F_2$

### Comentários:

Caro(a) aluno(a), para resolvermos essa questão de maneira simples devemos considerar que  $b = 2.a$ , pois fazendo isto combinado com a aplicação da equação de equilíbrio de momento no ponto O conseguimos encontrar as grandezas de  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  em função de  $F$ . Vejamos:

Viga 1

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_1 \cdot a = F \cdot 3a \Rightarrow F_1 = 3.F$$

Viga 2

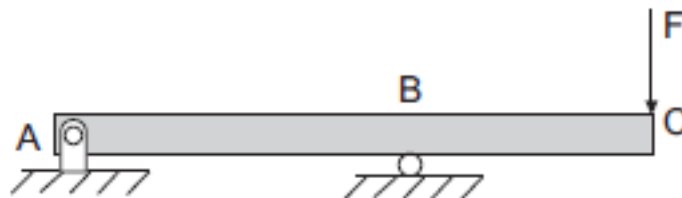
$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_2 \cdot 2a = F \cdot a \Rightarrow F_2 = \frac{F}{2}$$

Viga 3

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_3 \cdot 3a = F \cdot a \Rightarrow F_3 = \frac{F}{3}$$

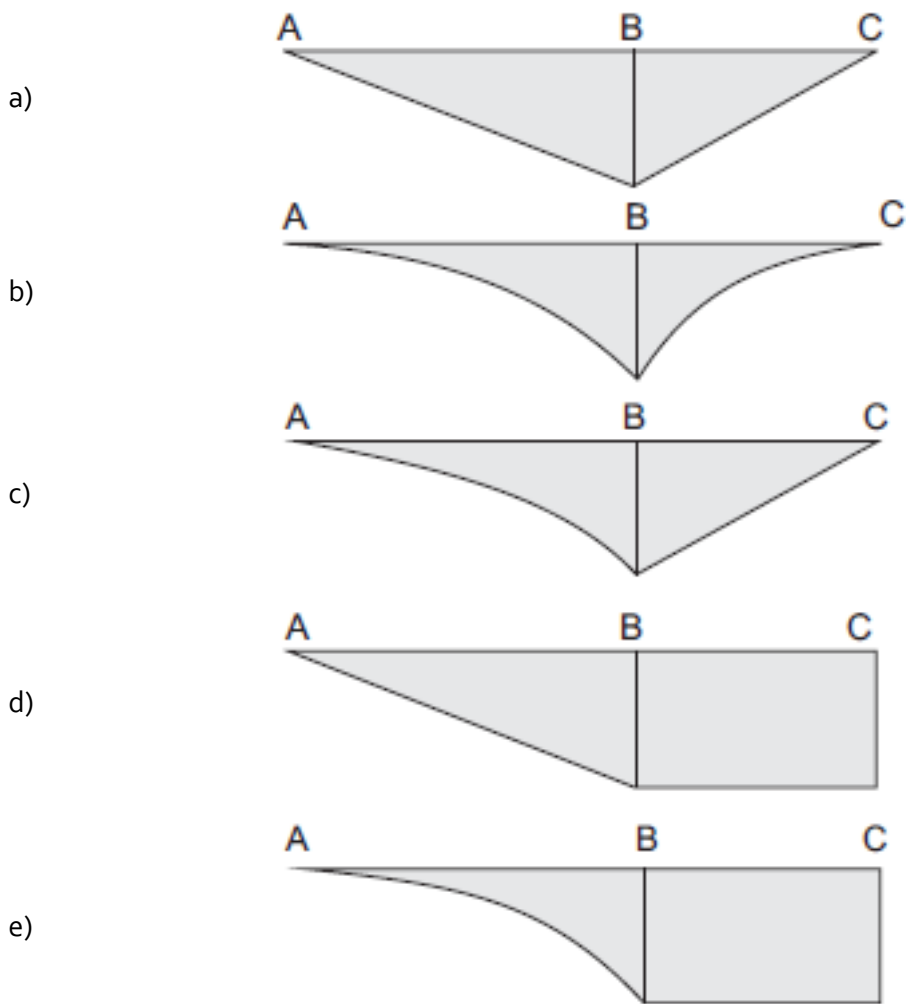
Assim  $F_1 > F_2 > F_3$ . Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

### 28. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



O diagrama que representa a distribuição dos momentos fletores atuantes ao longo da viga biapoiada, mostrada na figura, é

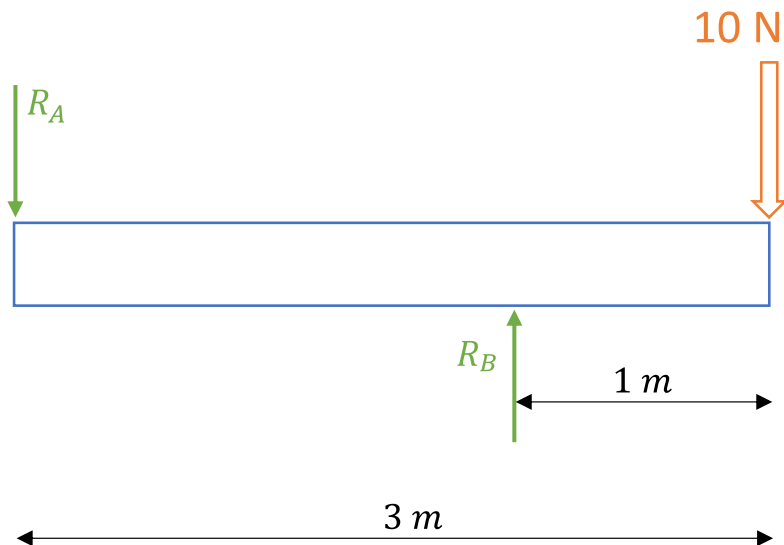




**Comentário:**

Caro(a) estrategista, mesmo que você não saiba decorado o formato do diagrama de momento fletor para a viga do enunciado e seu carregamento, podemos determiná-lo de maneira simples, desde que você conheça as equações do equilíbrio e como determinar os esforços internos. Primeiramente devemos conhecer as reações do apoio na viga. Como no enunciado não são fornecidos valores para as grandezas, deixo como dica, você atribuir valores arbitrários para lhe ajudar na solução. Vejamos o DCL com valores que atribui para a força e as distâncias entres os pontos:





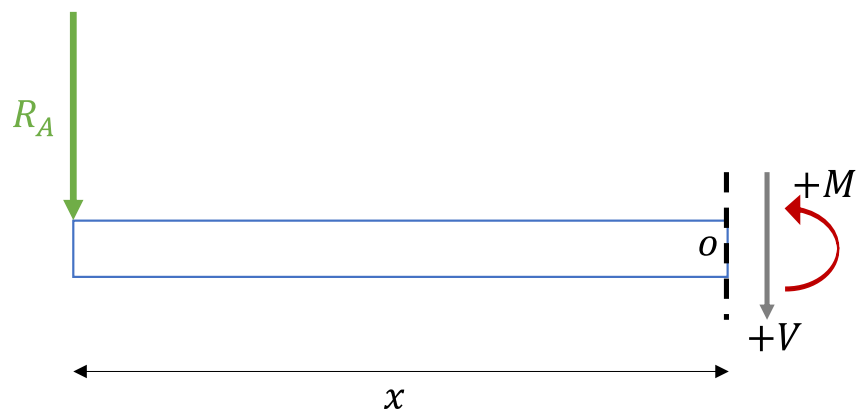
Pelas equações do equilíbrio das forças na direção Y e somatório de momento definimos se as direções adotadas para as reações estão corretas. Vejamos:

$$\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + R_B = 10 \text{ N}$$

$$\begin{matrix} + \\ \curvearrowright \end{matrix} \sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 2 = 10 \cdot 3 \Rightarrow R_B = 15 \text{ N} \quad \therefore R_A = 5 \text{ N}$$

Note que os sentidos das reações nos pontos A e B estão nos sentidos corretos.

Vamos agora determinar a equação para o momento fletor no trecho AB. Vejamos o DCL:

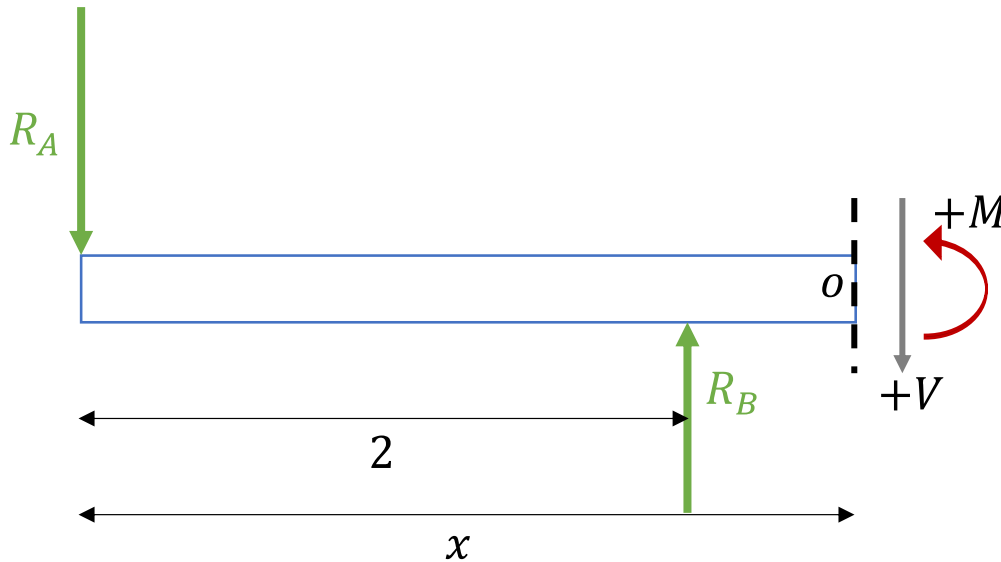


Por convenção, adotamos os sentidos demonstrados no D.C.L acima para momento fletor e esforço cortantes positivo.

$$\begin{matrix} + \\ \curvearrowright \end{matrix} \sum M_O = 0 \quad M + R_A \cdot x = 0 \Rightarrow M = -R_A \cdot x$$



Note que nesta seção da viga o momento fletor possuirá o formato de uma reta decrescente de acordo com sua equação. Vejamos o DCL para determinarmos a equação do momento fletor no trecho BC.



$$\sum M_o = 0 \quad M + R_A \cdot x - R_B \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow M = R_B \cdot x - R_B \cdot 2 - R_A \cdot x$$

Analisando as distâncias entre os pontos AC e BC podemos notar que a reação no ponto B é maior do que no ponto A, portanto a inclinação da reta no diagrama de momento fletor na equação acima deverá ser positiva. Contudo, vamos substituir as incógnitas das equações pelos valores atribuídos anteriormente.

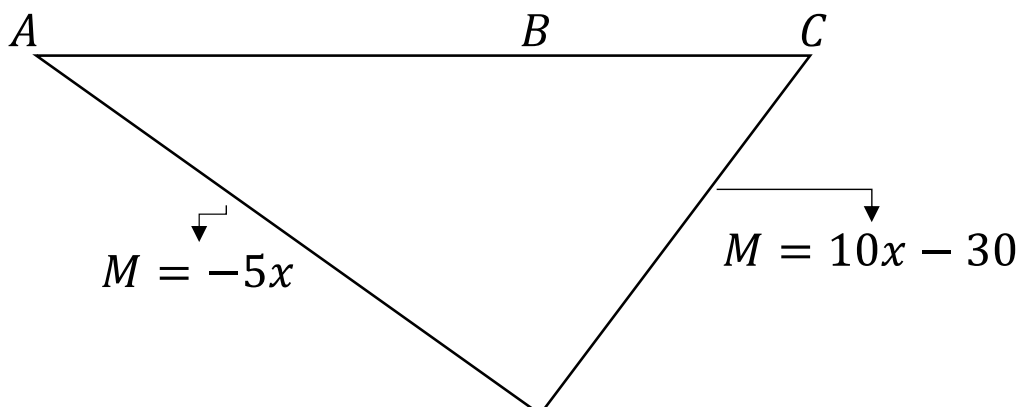
Trecho AB

$$M = -5 \cdot x$$

Trecho BC

$$M = 10 \cdot x - 30$$

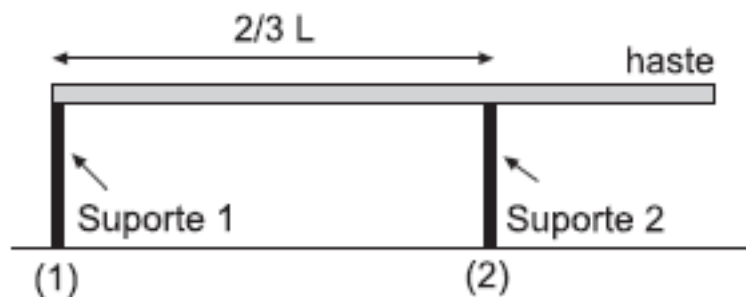
Assim, podemos montar o diagrama do momento fletor para as equações acima. Vejamos:





Portanto, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

29. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma haste homogênea de massa 50,0 kg é colocada horizontalmente sobre dois suportes, conforme mostra a figura.

O módulo da força exercida pelo suporte (1) na haste, em newtons, é de

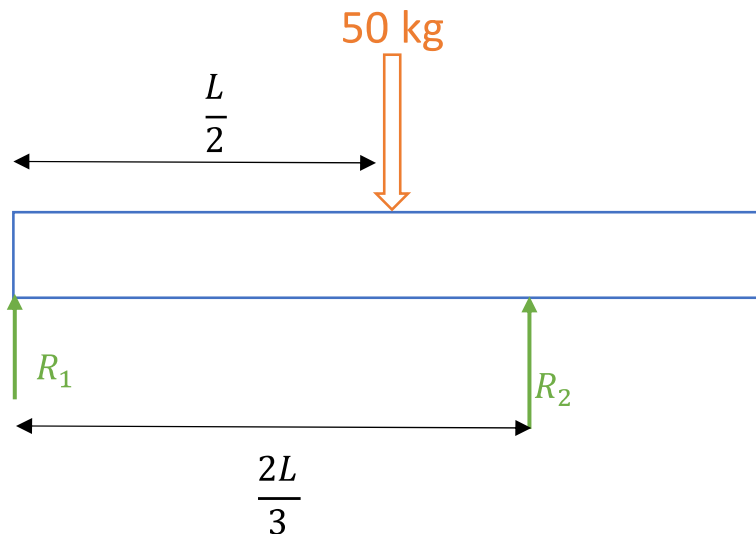
Dado:  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$

- a) 125,0
- b) 187,0
- c) 250,0
- d) 375,0
- e) 500,0

**Comentário:**

Primeiramente devemos montar o DCL com a indicação da força peso da haste atuando em seu centroide que é em  $L/2$ . Vejamos:





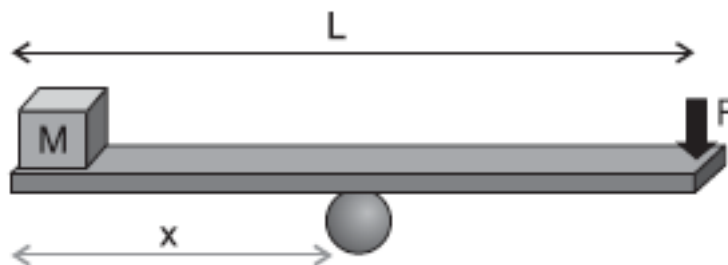
Desta forma, pelas equações do equilíbrio obtemos:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = F = 50 \cdot 10 = 500 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft \sum M_1 = 0 \Rightarrow -50 \cdot 10 \cdot \frac{L}{2} + R_2 \cdot \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow R_2 = 375 \text{ N} \quad \therefore R_1 = 125 \text{ N}$$

Logo, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

30. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma prancha de madeira de massa desprezível e comprimento  $L = 2,8 \text{ m}$  é utilizada para manter em equilíbrio, na horizontal, um cubo pequeno de massa  $20,0 \text{ kg}$  ao realizar uma força  $F$  de  $80,0 \text{ N}$  em uma das extremidades da prancha.

A distância, em metros, entre o ponto de apoio da prancha e a posição onde se encontra o cubo é de

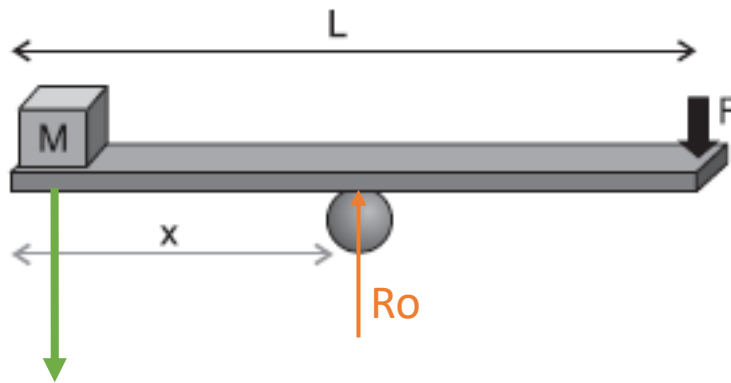
- a) 0,56
- b) 0,80
- c) 1,00
- d) 1,12



e) 1,40

**Comentário:**

Caro(a) aluno(a), para resolvermos essa questão devemos basicamente aplicar as equações do equilíbrio. Vejamos:



$$\sum^+ F_y = 0 \Rightarrow -M \cdot g + R_o - F = 0 \Rightarrow -200 + R_o - 80 = 0 \Rightarrow R_o = 280 \text{ N}$$

$$\sum^+ M_o = 0 \quad M \cdot g \cdot x - F \cdot (L - x) = 0 \Rightarrow M \cdot g \cdot x = F \cdot L - F \cdot x \Rightarrow 200x = 224 - 80x$$

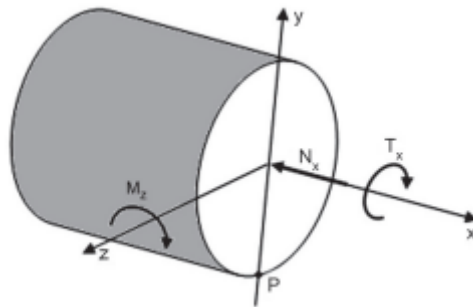
$$x = 0,8 \text{ m}$$

Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.



## 5 - LISTA DE QUESTÕES

1. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Uma transmissão de movimento entre eixos paralelos é realizada por meio de um par de engrenagens helicoidais que transmitem aos eixos uma força normal  $N_x$ , um torque  $T_x$  e um momento fletor  $M_z$ , conforme ilustrado na seção transversal apresentada na Figura.



Diante desse cenário, esses esforços produzem, no cubo representativo do ponto P da seção transversal da Figura, tensões normais e cisalhantes, tais que

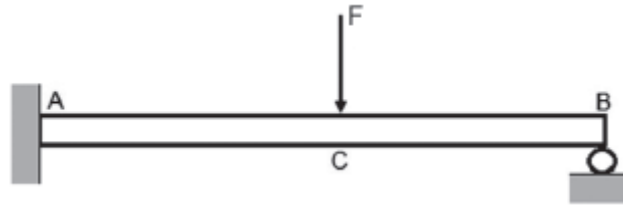
- A)  $\sigma_x > 0$  e  $\tau_{xz} = 0$
- B)  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xz} = 0$
- C)  $\sigma_z \neq 0$  e  $\tau_{xz} \neq 0$
- D)  $\sigma_x < 0$  e  $\tau_{xz} \neq 0$
- E)  $\sigma_x < 0$  e  $\tau_{xz} = 0$

2. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A fratura intergranular deve ser evitada nos metais em serviço porque esse tipo de fratura

- A) causa forte deformação plástica.
- B) secciona os grãos por clivagem.
- C) absorve muita energia na sua propagação.
- D) absorve pouca energia na sua propagação.
- E) resulta de uma grande geração de discordâncias no interior dos grãos.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Uma viga está apoiada em uma de suas extremidades e engastada na outra, e está suportando uma carga concentrada  $F$  no centro de seu vão.

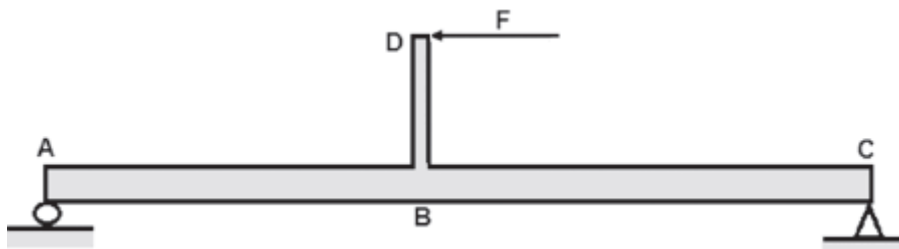




As reações de apoio atuantes nas extremidades dessa viga são obtidas utilizando-se as

- A) condições de equilíbrio, apenas
- B) condições de equilíbrio e a Lei de Hooke
- C) condições de equilíbrio e uma equação da resistência dos materiais envolvendo a linha elástica
- D) condições de equilíbrio e uma equação relacionada à geometria da seção transversal da viga
- E) condições de equilíbrio e as informações sobre a resistência do material da viga

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A viga biapoiada ABC mostrada na Figura deve suportar os efeitos da carga F atuante no ponto D, conforme indicado.

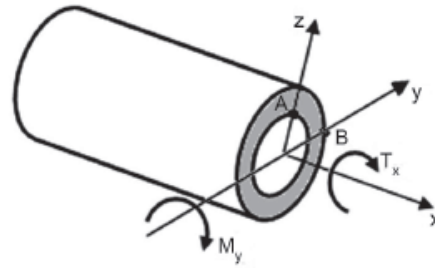


Os esforços internos atuantes no trecho BC da viga são de

- A) flexão, apenas
- B) carga axial de tração, apenas
- C) carga axial de compressão, apenas
- D) flexão combinada com carga axial de tração
- E) flexão combinada com carga axial de compressão

5. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) A seção transversal de um eixo oco está submetida à ação de um momento fletor  $M_y$  e de um torque  $T_x$ , conforme ilustrado na Figura.





Considerando-se o sistema de referência xyz ilustrado na Figura, a tensão normal  $\sigma_x$  atuante no ponto A e a tensão cisalhante  $\tau_{xy}$  atuante no ponto B da seção são, respectivamente,

- A) positiva e nula
- B) negativa e nula
- C) positiva e diferente de zero
- D) negativa e diferente de zero
- E) nula e diferente de zero

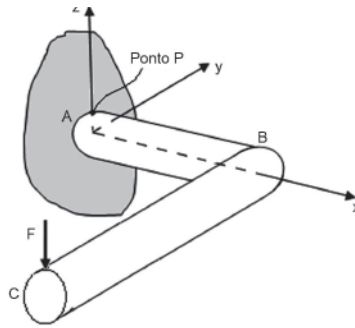
6. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) Em um projeto a determinação das dimensões da seção transversal de uma viga utiliza a expressão da tensão normal de flexão,  $\sigma = Mc/I$ , na qual M é o momento fletor máximo, c é a distância entre a linha neutra e a fibra mais afastada da linha neutra, e I é o momento de inércia da seção. Essa tensão é comparada à tensão admissível do projeto, e o módulo de resistência à flexão necessário ( $W = I/c$ ) é determinado.

Considerando-se que a seção transversal seja retangular, de base b e altura h, esse módulo será expresso por

- A)  $bh/6$
- B)  $bh/12$
- C)  $bh^2/6$
- D)  $bh^3/6$
- E)  $bh^3/12$

7. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2023) O acionamento de abertura de uma porta é constituído de uma estrutura em que pode ser identificado um trecho AB perpendicular a um trecho BC, ambos de seção transversal circular com diâmetro constante, conforme a Figura.

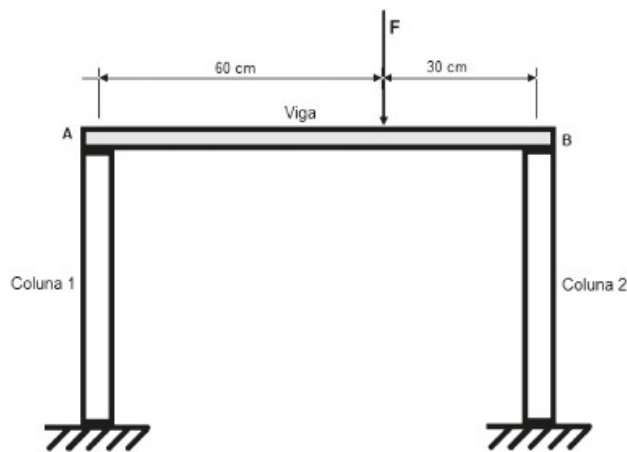




Considerando-se o sistema de referência  $xyz$  representado na Figura, verifica-se que no ponto P da seção transversal no engaste são nulas as tensões

- A)  $\sigma_x, \tau_{xy}$  e  $\tau_{yz}$
- B)  $\sigma_x, \tau_{yz}$  e  $\sigma_z$
- C)  $\sigma_y, \tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$
- D)  $\sigma_z, \tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$
- E)  $\sigma_y, \sigma_z$  e  $\tau_{yz}$

8. (CESGRANRIO/ELETRONUCLEAR-2022) A viga AB mostrada na Figura suporta uma carga F na posição indicada.



As colunas 1 e 2 são idênticas, isto é, mesmo material, mesmo comprimento e mesma seção transversal, e a viga é simplesmente apoiada sobre as colunas.

Nessas condições, as deformações ( $\delta$ ) sofridas pelas colunas 1 e 2 são tais que

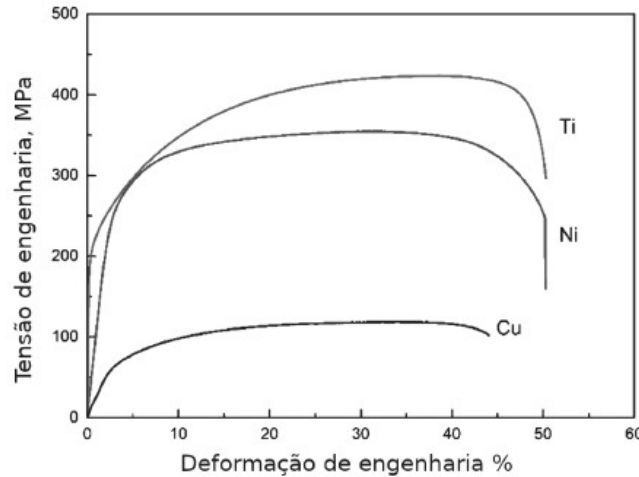
- A)  $\delta_1 = \delta_2$
- B)  $\delta_1 = 2\delta_2$
- C)  $\delta_1 = 3\delta_2$



D)  $\delta_2 = 2\delta_1$

E)  $\delta_2 = 3\delta_1$

9. (CESGRANRIO/ELETRONUCLEAR-2022) Considere o gráfico tensão versus deformação de engenharia apresentado abaixo para os materiais puros Cu, Ni e Ti.



Uma oficina mecânica precisa fazer uma haste com seção quadrada de 1 mm de lado para suportar uma carga de tração de 150 N, sem deformação plástica.

Que material(is), dentre o(s) apresentado(s) no gráfico pode(m) ser empregado(s) para fazer essa haste?

- A) Cu, apenas
- B) Cu e Ni, apenas
- C) Cu e Ti, apenas
- D) Ni e Ti, apenas
- E) Cu, Ni e Ti

10. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Duas vigas biapoiadas ( $V_1$  e  $V_2$ ), com comprimentos, materiais e áreas de seção transversal idênticas, são solicitadas por cargas concentradas também idênticas no meio de seu vão.

Se os momentos de inércia das seções transversais das duas vigas são tais que  $I_1 > I_2$ , as tensões normais máximas atuantes nas duas vigas ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) serão tais que

- A)  $\sigma_1 > \sigma_2$ , pois  $I_1 > I_2$ .
- B)  $\sigma_1 < \sigma_2$ , pois  $I_1 > I_2$ .
- C)  $\sigma_1 = \sigma_2$ , pois os materiais são idênticos.





D)  $\sigma_2 = \sigma_2$ , pois as áreas das seções transversais são idênticas.

E)  $\sigma_1$  pode ser maior, menor ou igual a  $\sigma_2$ , pois a tensão normal depende de outros parâmetros.

**11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere uma barra carregada axialmente. O estado de tensões gerado para um ponto qualquer da barra é tal que  $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0$  e  $\sigma_z = 0$**

Para essa situação, não será(ão) nula(s) a(s) deformaçã(o)es

A)  $\epsilon_x$ , apenas

B)  $\epsilon_y$ , apenas

C)  $\epsilon_z$ , apenas

D)  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , apenas

E)  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$

**12. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Um cubo de lado L foi construído com um material que possui um módulo de Young de 200 GPa e uma constante de Poisson de 0,33. Esse cubo é submetido a um estado plano de tensões compressivas elásticas sem nenhuma tensão cisalhante,  $|\sigma_X| = |\sigma_Y| = 200$  MPa.**

Qual o valor da deformação percentual na direção z?

A) 0,066%

B) 0,033%

C) 0,0%

D) -0,033%

E) -0,066%

**13. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma haste, de seção reta quadrada, cujo lado mede a cm e de comprimento 1 m, será empregada em um projeto para suportar uma carga trativa de 80 kN ao longo do comprimento com uma deformação elástica máxima de 0,04 cm. A haste será feita de um material que apresenta um módulo de Young de 200 GPa e um limite de escoamento de 40 MPa.**

Assim sendo, o lado da seção quadrada da haste (com estimativa de  $\pm 1$  mm) deverá ser de, no mínimo,

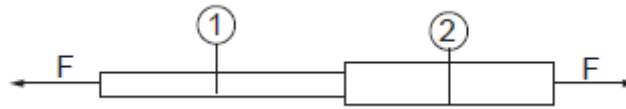
A) 32

B) 16



- C) 45
- D) 42
- E) 35

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) A barra de seção variável mostrada na Figura abaixo está sujeita a uma força axial trativa  $F$ .

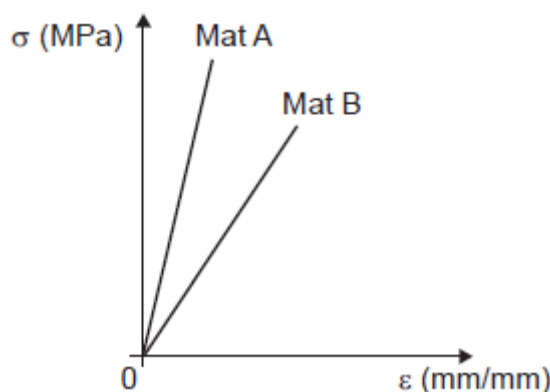


As tensões normais admissíveis e as seções transversais da barra são tais que  $\sigma_1 = 250$  MPa,  $\sigma_2 = 100$  MPa,  $A_1 = 2,0$  cm<sup>2</sup> e  $A_2 = 4,0$  cm<sup>2</sup>.

A força  $F$  máxima, expressa em kN, que pode ser aplicada à barra, sem que as tensões admissíveis sejam ultrapassadas é de

- A) 10
- B) 20
- C) 25
- D) 40
- E) 50

15. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Os resultados de um ensaio de tração realizado na região de comportamento elástico linear de dois corpos de prova de materiais dúcteis distintos (A e B) são representados pelas retas no diagrama tensão x deformação mostrado na Figura abaixo.



A propriedade com maior valor no material A do que no material B, segundo esses resultados, é a(o)

- A) alongamento percentual



- B) módulo de elasticidade
- C) massa específica
- D) tensão de ruptura
- E) tensão de escoamento

**16. (CESGRANRIO/EMAP-2018) Com base nos conceitos da mecânica dos materiais, julgue o item a seguir.**

O módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson são parâmetros que permitem determinar a resistência de um corpo de material isotrópico à deformação elástica na direção da tensão normal aplicada, quando esse corpo está submetido a cargas mecânicas.

**17. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma equipe de obra resolveu empregar um cabo de nylon (limite de escoamento = 45 MPa, limite de resistência mecânica = 90 MPa.) para manter suspensa uma carga de 2000 N. O cabo possui uma seção reta circular.**

Dado: Estime o valor com erro de 0,1 mm

Qual o menor diâmetro, em milímetros, capaz de suportar essa carga dentro do regime elástico?

- a) 1,9
- b) 2,7
- c) 3,8
- d) 5,4
- e) 7,5

**18. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma viga biapoiada de comprimento L está sujeita a uma força concentrada F atuante a uma distância L/4 de uma de suas extremidades.**

O momento fletor máximo e a força cisalhante máxima atuantes na viga são expressos, respectivamente, por

- a)  $FL/4$  e  $F/4$
- b)  $FL/4$  e  $3F/4$
- c)  $3FL/4$  e  $F/4$
- d)  $3FL/16$  e  $F/4$
- e)  $3FL/16$  e  $3F/4$

**19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere uma barra de seção transversal constante sujeita a uma tensão normal de tração com valor de 200 MPa. Se a força axial atuante na barra vale 50 kN, sua área de seção transversal, expressa em  $\text{cm}^2$ , é de**



- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 4,0

20. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Um eixo de comprimento  $L$  é engastado em uma de suas extremidades e possui uma engrenagem na outra extremidade que transmite a ele um torque  $T$ , que, por sua vez, gera uma tensão cisalhante máxima  $\tau$  no eixo.

Se o comprimento do eixo fosse  $L/2$ , a tensão cisalhante gerada seria

- a)  $\tau/2$
- b)  $\tau/4$
- c)  $\tau/8$
- d)  $2\tau$
- e) inalterada

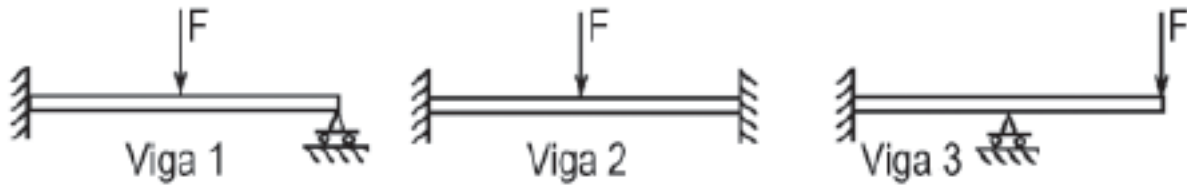
21. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma barra com 1 m de comprimento é submetida a um carregamento axial,  $F$ , de 10 kN, como mostra a Figura abaixo.

Considerando a seção transversal,  $A_0$ , de  $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e o módulo de elasticidade,  $E$ , do aço, de 200 GPa ( $200 \times 10^9 \text{ Pa}$ ), o alongamento ( $\Delta l$ ) do tubo, em m, é

- a)  $10^{-2}$
- b)  $10^{-3}$
- c)  $10^{-4}$
- d)  $10^{-8}$
- e)  $10^{-10}$

22. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere as três vigas planas, estaticamente indeterminadas, mostradas na Figura a seguir.

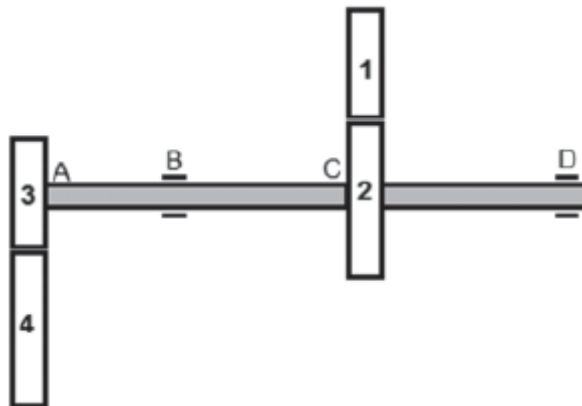




Ao retirar-se uma das restrições de apoio de cada uma dessas vigas, aquela(s) que se tornará(ão) estaticamente determinada(s) é(são), APENAS, a(s) viga(s)

- a) 1
- b) 2
- c) 1 e 3
- d) 1 e 2
- e) 2 e 3

23. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) O sistema de transmissão mostrado na Figura abaixo é constituído de dois pares de engrenagens e um eixo. As engrenagens 1 e 3 possuem raios idênticos de 8 cm, e as engrenagens 2 e 4 possuem raios idênticos de 12 cm.



O diagrama de torques atuantes no eixo ABCD apresenta valores não nulos no(s) trecho(s)

- A) AB, apenas
- B) BC, apenas
- C) AB e BC, apenas
- D) AB e CD, apenas
- E) AB, BC e CD



24. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma viga engastada em uma de suas extremidades e livre na outra é solicitada por uma força  $F$ , concentrada no meio de seu comprimento.

Se a distância entre as extremidades da viga é  $L$ , o momento fletor atuante na extremidade engastada é calculado pela expressão

- a)  $F.L$
- b)  $F.L/2$
- c)  $F.L/4$
- d)  $F.L^2/2$
- e)  $F.L^2/4$

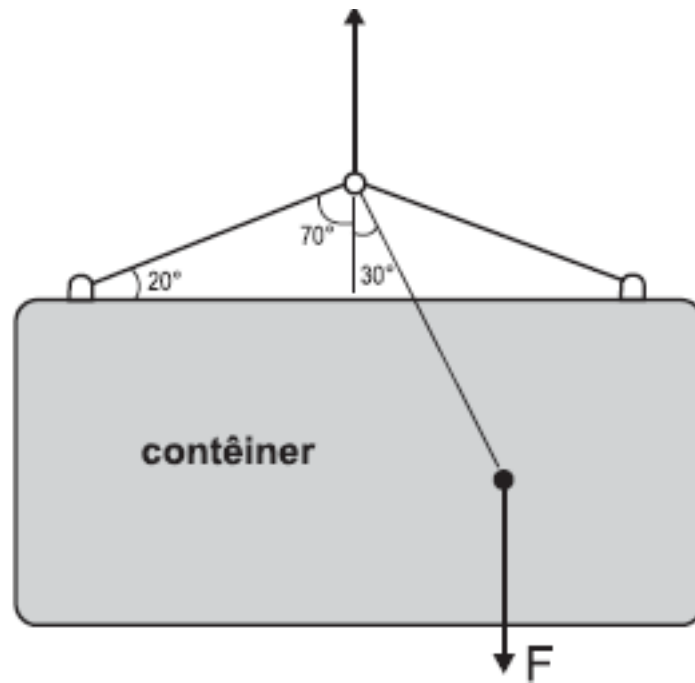
25. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) Uma das importantes etapas do projeto estático de um componente estrutural é a construção do diagrama de corpo livre do componente.

No diagrama de corpo livre de uma viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído ao longo de seu comprimento, são representados(as)

- a) o carregamento externo e as reações de apoio
- b) o carregamento externo e a distribuição de momentos fletores
- c) o carregamento externo e a distribuição dos esforços cisalhantes
- d) os carregamentos externos, apenas
- e) as distribuições de esforços cisalhantes e de momentos fletores

26. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) Um contêiner é suspenso por um sistema de cabos, conforme ilustrado na Figura abaixo.

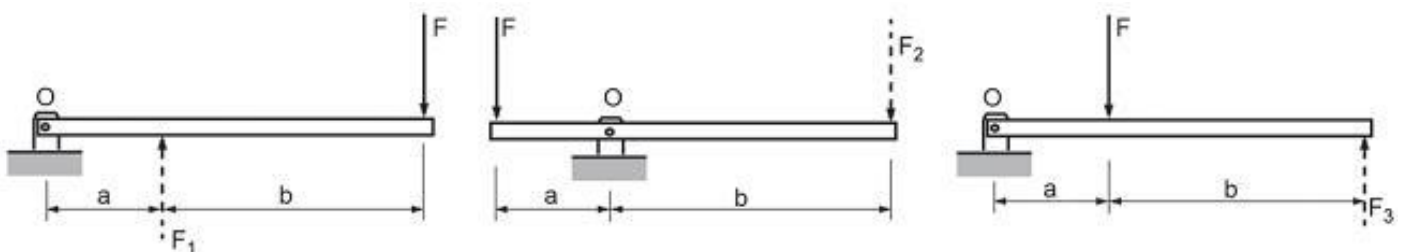




Se a força  $F$  resultante do peso do contêiner e da carga em seu interior é posicionada conforme indicado, o ângulo de inclinação em relação à horizontal, quando o sistema estiver em equilíbrio estático, será igual a

- a)  $20^\circ$
- b)  $30^\circ$
- c)  $45^\circ$
- d)  $60^\circ$
- e)  $70^\circ$

27. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) A Figura abaixo mostra três sistemas de alavanca nos quais a força  $F$  é a força aplicada,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são as forças resistentes e  $b > a$ .



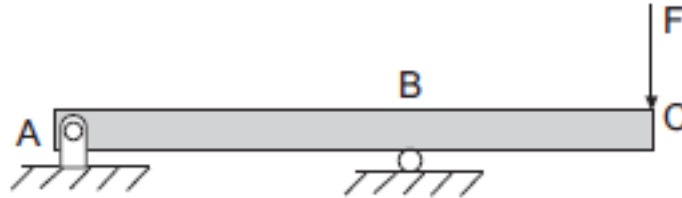
De modo a se determinar a configuração que apresenta a maior força resistente, avaliou-se o equilíbrio de cada alavanca. Essa análise resultou na relação entre  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , expressa por

- a)  $F_1 = F_2 = F_3$
- b)  $F_1 < F_2 < F_3$



- c)  $F_1 > F_2 > F_3$
- d)  $F_1 = F_2$  e  $F_3 < F_2$
- e)  $F_1 = F_2$  e  $F_3 > F_2$

28. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



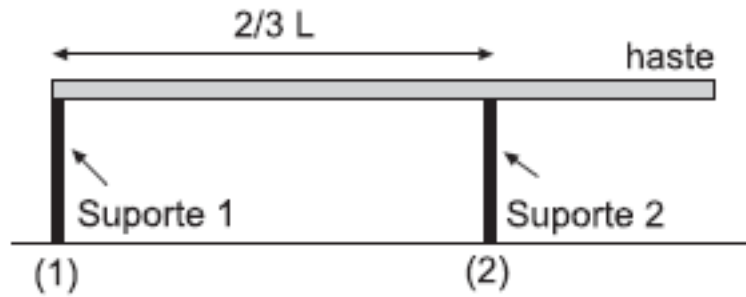
O diagrama que representa a distribuição dos momentos fletores atuantes ao longo da viga biapoiada, mostrada na figura, é

- a)
- b)
- c)
- d)

29. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)







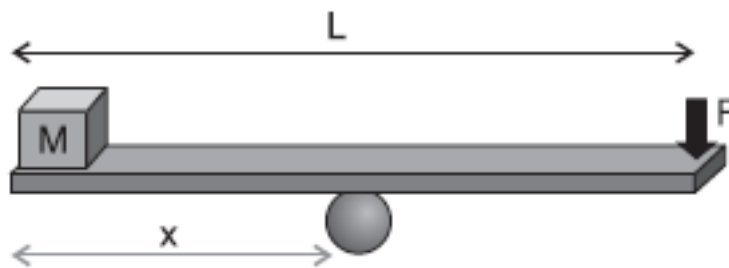
Uma haste homogênea de massa  $50,0 \text{ kg}$  é colocada horizontalmente sobre dois suportes, conforme mostra a figura.

O módulo da força exercida pelo suporte (1) na haste, em newtons, é de

Dado:  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$

- a)  $125,0$
- b)  $187,0$
- c)  $250,0$
- d)  $375,0$
- e)  $500,0$

30. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma prancha de madeira de massa desprezível e comprimento  $L = 2,8 \text{ m}$  é utilizada para manter em equilíbrio, na horizontal, um cubo pequeno de massa  $20,0 \text{ kg}$  ao realizar uma força  $F$  de  $80,0 \text{ N}$  em uma das extremidades da prancha.

A distância, em metros, entre o ponto de apoio da prancha e a posição onde se encontra o cubo é de

- a)  $0,56$
- b)  $0,80$
- c)  $1,00$



d) 1,12

e) 1,40



## 6 - GABARITO

- |       |               |       |
|-------|---------------|-------|
| 1. D  | 13. C         | 25. A |
| 2. D  | 14. D         | 26. B |
| 3. C  | 15. B         | 27. C |
| 4. D  | 16. INCORRETO | 28. A |
| 5. A  | 17. E         | 29. A |
| 6. C  | 18. E         | 30. B |
| 7. E  | 19. D         |       |
| 8. D  | 20. E         |       |
| 9. D  | 21. C         |       |
| 10. E | 22. C         |       |
| 11. E | 23. C         |       |
| 12. A | 24. B         |       |



## 7 – RESUMO

Para lhe ajudar, preparei um apanhado com as **principais fórmulas** abordadas nesta aula. É muito importante que você tenha conhecimento de **todas** elas!

TEMA	FÓRMULA
Momento	$M = F \cdot d$
Equações de equilíbrio	$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$
Treliça estável	$b \geq 2 \cdot n - 3$
Centro de massa	$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$ $\bar{X} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$ $\bar{Y} = \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$
Centróide	$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$ $\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$
Momento de Inércia de um retângulo	$I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$
Momento de inércia de um círculo	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
Momento de inércia de um triângulo	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Teorema dos eixos paralelos	$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2; \quad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2;$ $J_o = \bar{J}_c + Ad^2$
Tensão normal	$\sigma = \frac{P}{A}$



Tensão de cisalhamento média	$\tau_{méd} = \frac{V}{A}$
Fator de Segurança	$FS = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} \quad e \quad FS = \frac{\tau_{rup}}{\tau_{adm}}$
Deformação normal	$\epsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$
Tensão de engenharia	$\sigma = \frac{P}{A_0}$
Deformação de engenharia	$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$
Percentual de alongamento e percentual de redução de área	$Per. \text{ de alongamento} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0} \cdot (100\%)$ $Per. \text{ de red. de área} = \frac{A_{rup} - A_0}{A_0} \cdot (100\%)$
Lei de Hooke	$\sigma = E \cdot \epsilon$
Deformação axial e deformação lateral	$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad e \quad \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$
Deformação elástica	$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad \delta = \sum \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$
Tensão de cisalhamento máxima (torção)	$\tau_{máx} = \frac{T \cdot c}{J}$
Momento polar de inércia eixo maciço e eixo tubular	$J = \frac{\pi}{2} c^4 ; \quad J = \frac{\pi}{4} (c_{ext}^4 - c_{int}^4)$
Ângulo de torção	$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$
Esforço cortante (diagrama)	$\frac{dV}{dx} = -w(x)$
Momento Fletor (diagrama)	$\frac{dM}{dx} = V$



Tensão de flexão	$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot c}{I}$
Vaso de pressão cilíndrico	$\sigma_{circ} = \frac{P \cdot r}{t} \quad ; \quad \sigma_{long} = \frac{P \cdot r}{2 \cdot t}$
Vaso de pressão esférico	$\sigma = \frac{P \cdot r}{2 \cdot t}$
Transformação de tensão (Círculo de Mohr)	$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \text{sen } 2\theta$ $\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ $R = \tau_{m\acute{a}x \text{ no plano}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
Transformação de deformação (Círculo de Mohr)	$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{sen } 2\theta$ $\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \text{sen } 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{cos } 2\theta$ $\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ $\frac{\gamma_{m\acute{a}x \text{ no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ $\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$
Deflexão	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$
Carga crítica e tensão crítica em flambagem	$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{(K \cdot L)^2} \quad ; \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(K \cdot L/r)^2}$



# ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



**1** Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



**2** Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



**3** Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



**4** Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



**5** Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



**6** Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



**7** Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



**8** O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.